Marisa Martins Barras

Licenciatura em Matemática Aplicada

Relatório de Estágio

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino da Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no
Ensino Secundário

Orientador: Professor Doutor António Domingos, FCT-UNL
Co-orientador: Professora Maria Teresa de Brito, ESJP

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes Almeida Santos
Arguente(s): Prof. Doutor Filipe José GonçalvesPereira Marques
Vogal: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos
Vogal: Prof. Maria Teresa Subtil Brito Pedro de Brito

FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Julho 2012

Marisa Martins Barras

Licenciatura em Matemática Aplicada

Relatório de Estágio

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino da Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no
Ensino Secundário

Orientador: Professor Doutor António Domingos, FCT-UNL
Co-orientador: Professora Maria Teresa de Brito, ESJP

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes Almeida Santos
Arguente(s): Prof. Doutor Filipe José GonçalvesPereira Marques
Vogal: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos
Vogal: Prof. Maria Teresa Subtil Brito Pedro de Brito

FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Julho 2012

Relatório de Estágio

Aos meus pais

Agradecimentos

A vós pais,

A ti companheiro e amigo,

A si professor António,

A si professora Teresa,

A ti Ricardo,

A vós amigos,

e a todos aqueles que de alguma forma

contribuíram para a realização deste Relatório.

RESUMO

O presente trabalho divide-se em duas partes. A primeira é constituída pelo relatório de estágio que decorreu na Escola Secundária Jorge Peixinho durante o ano letivo de 2011/2012.

A segunda refere-se ao relatório de investigação na prática pedagógica desenvolvido no decorrer do mesmo ano letivo.

Os principais objetivos da investigação na prática pedagógica foram, verificar se os alunos mobilizaram os seus conhecimentos num contexto de Modelação Matemática e tentar entender quais as suas maiores dificuldades perante este tipo de problemas.

A investigação decorreu ao longo do segundo período letivo, nas aulas da disciplina de Matemática A, numa turma do 11º ano de escolaridade. Foram propostas três tarefas de Modelação Matemática e escolhidos três alunos para uma observação mais atenta por parte da investigadora.

Assim, foi adotada uma metodologia qualitativa, seguindo uma estratégia de estudo de caso e as técnicas utilizadas na recolha de dados foram a observação, a análise documental e o inquérito por questionário. Relativamente a este último, com o objetivo de recolher dados descritivos na escrita dos alunos e conhecer melhor algumas das suas conceções, foram colocadas três questões de resposta aberta sobre Modelação Matemática. No final das três sessões os alunos responderam ainda a um questionário confidencial, que tinha como principal propósito verificar qual a apreciação e opinião dos mesmos acerca de todo o processo desenvolvido ao longo das aulas.

Por fim, procedeu-se à análise de todos os dados recolhidos e às respetivas conclusões.

Palavras-chave: Aplicação Matemática, Aprendizagem, Ensino da Matemática , Estágio Pedagógico, Matemática, Modelação Matemática.

ABSTRACT

This work is divided into two parts. The first is the report on the training which took place in the Jorge Peixinho Secondary School during the academic year of 2011/2012.The second deals with the report of the research into the teaching practice developed during the same year.

The main objetives of this research are to determine whether the students use their knowledge within a context of Mathematical Modelling and try to understand their greatest difficulties when faced with problematic situations in the real world.

The research took place during the second term of the school year in 11th. year Mathematics A lessons.

Regarding the gathering of data, a qualitative methodology was adopted followed by a case study strategy. Three assignments on Mathematical Modelling were given to the class and three of them chosen for closer observation by the researcher. The techniques used were observation, documental analysis and a questionnaire.

The pupils were asked three open-answer questions on Mathematical Modelling which served mainly to gather descriptive data and find out more about some of their ideas. At the end of the three sessions, they were handed a confidential questionnaire, the main aim of which was to determine the pupils' appreciation and opinion of Mathematical Modelling lessons.

Finally, all the data was analysed and the respective conclusions reached.

Key words: Teacher training, Mathematics, teaching Mathematics, Applied Mathematics, Mathematical Modelling

ÍNDICE DE MATÉRIAS

Parte II – Relatório do trabalho de investigação na prática pedagógica

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

ÍNDICE DE FIGURAS

Índice de Quadros

Lista de Siglas

CEF	Cursos de Educação e Formação
EFA	Educação e Formação de Adultos
FCTUC	Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
FCT-UNL	Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa
ME	Ministério da Educação
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
SPM	Sociedade Portuguesa de Matemática

NOTA PRÉVIA

O presente trabalho divide-se em duas partes. A primeira constitui o relatório de estágio que decorreu na Escola Secundária Jorge Peixinho durante o ano letivo de 2011/2012.

A segunda refere-se ao relatório de investigação na prática pedagógica desenvolvido no decorrer deste ano letivo no âmbito das disciplinas de Investigação na Prática Pedagógica I e II unidades curriculares do plano de estudos do Mestrado em Ensino da Matemática.

A par deste trabalho escrito foi elaborado um dossier de estágio onde estão arquivados todos os documentos produzidos ao longo do ano.

"As ilusões nunca são perdidas. Elas significam o que há de melhor na vida dos homens e dos povos. Perdidos são os céticos que escondem sob uma ironia fácil a sua impotência para compreender e agir, perdidos são aqueles períodos da história em que os melhores, gastos e cansados, se retiram da luta, sem enxergarem no horizonte nada a que se entreguem, caída uma sombra uniforme sobre o pântano estéril da vida sem formas. Benditas as ilusões, adesão firme e total a qualquer coisa de grande, que nos ultrapassa e nos requer. Sem ilusão, nada sublime teria sido realizado nem a catedral de Estrasburgo nem as sinfonias de Beethoven. Nem a obra imortal de Galileo."

Bento de Jesus Caraça

PARTE I

RELATÓRIO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA

CAPÍTULO 1

ENQUADRAMENTO GERAL

I.1.1. Escola Secundária Jorge Peixinho

Figura I.1.1: Escola Secundária Jorge Peixinho

A Escola Secundária Jorge Peixinho, situada na cidade do Montijo, concelho com 8 freguesias, foi criada como Escola Industrial e Comercial, em 10 de setembro de 1957. A construção do edifício principal foi concluída em 1963, sendo a única escola durante anos a servir o concelho e os concelhos vizinhos.

A escola tem tido um papel fundamental, não só, na formação profissional dos jovens da região e na sua inserção na vida ativa, mas também no complemento de formação de adultos que frequentam o ensino noturno. Em 1974, com as reformas introduzidas no sistema educativo, tomou a designação de Escola Polivalente do Montijo e um pouco mais tarde a de Escola Secundária do Montijo. Em 1986, quando foi criada uma segunda escola secundária no concelho, passou a designar-se Escola Secundária nº 1 do Montijo. A atual designação data de julho de 1998 e pretende homenagear o Maestro Jorge Peixinho (1940 -1995), natural de Montijo. Jorge Peixinho merece um especial destaque pela sua obra, nomeadamente, "Mediterrânea" estreada pelo Grupo de Música Contemporânea nos décimos sextos "Encontros Gulbenkian de Música" em Lisboa. Em 1974, foi eleito membro do Conselho Presidencial da Sociedade Internacional de Música Contemporânea e em 1991 recebeu uma medalha de ouro da Câmara Municipal do Montijo.

Recentemente, em virtude de alguma degradação a escola está a ser alvo de uma recuperação, esta obras iniciaram no ano letivo de 2010/2011, porém ainda continuam por terminar e consequentemente as aulas decorreram em pavilhões pré-fabricados. Para algumas turmas, o início do terceiro período letivo iniciou nas novas, espaçosas e iluminadas instalações. A Escola Secundária Jorge Peixinho oferece aos alunos um vasto leque de opções formativas que se encontram sintetizadas nos quadros abaixo. Este ano letivo, o ensino regular contou com, 636 alunos no ensino básico e 482 no ensino secundário, nos Cursos de Educação e Formação (CEF), 54 alunos de ensino básico, na Educação e Formação de Adultos (EFA), 39 alunos de ensino básico e 104 do ensino secundário. O Ensino Recorrente, pode contar com 14 alunos, e os Cursos Profissionais, com 47 alunos no ensino secundário.

3º Ciclo
❖ **Ensino Básico 3º Ciclo**
❖ **CEF** ▪ Tipo 2 – Nível 2 (Curso de 2 anos, acesso com 6º ano de escolaridade, frequência de 7º ou 8º ano e idade igual ou superior a 14 anos) o Logística e Armazenagem o Práticas Técnico – Comerciais ▪ Tipo 3 – Nível 2 (Curso de 1 ano, acesso com conclusão de 8º ou frequência de 9º ano e idade igual ou superior a 14 anos) o Instalação e Operação de Sistemas Informáticos

Quadro I.1.1: Opções formativas 3º ciclo

Ensino Secundário Regular
❖ **Curso de Ciências e Tecnologias**
❖ **Curso de Artes Visuais**
❖ **Curso de Línguas e Humanidades**
❖ **Curso de Ciências Socioeconómicas**
❖ **Profissional** (nível 4 de qualificação) ▪ Técnico de Energias Renováveis ▪ Técnico de Gestão ▪ Técnico de Gestão de Equipamentos Informáticos

Quadro I.1.3: Opções formativas Ensino Secundário Regular

Ensino Noturno
❖ **Recorrente (12º ano)** ▪ Curso de Ciências Sociais e Humanas
❖ **EFA** ▪ EFA – Básico 3º ciclo ▪ EFA - Secundário

Quadro I.1.2:Opções formativas Ensino Noturno

A população escolar 2011/2012 é constituída por cerca de 1376 alunos, distribuídos pelo Ensino Diurno e Noturno e pelos vários níveis de ensino. No corpo docente contam-se 149 professores, dos quais 109 encontram-se no quadro da escola, 6 no quadro de zona pedagógica e 34 são contratados.
No corpo não docente integram-se 43 profissionais, entre os quais 2 técnicos superiores, 12 assistentes técnicos e 29 assistentes operacionais.

É importante referir que no projeto educativo da escola vigoram os seguintes objetivos:

1. Promover o Projeto Educativo como instrumento vivo e operante, ao serviço da melhoria da escola;
2. Motivar os recursos humanos e os alunos e promover atitudes de envolvimento positivo com as tarefas;
3. Desenvolver atitudes e valores de responsabilização, respeito pelos outros e tolerância crítica;
4. Induzir espetativas elevadas, renovar metas e melhorar resultado;
5. Dignificar a imagem da escola e promover a interação com a comunidade.

A Escola Secundária Jorge Peixinho, enquanto estabelecimento público de ensino, tem como missão garantir a todos os cidadãos o direito à Educação, defendendo um ensino público de qualidade, que permita a todos que a frequentam a máxima valorização pessoal e social.

LOGOTIPO DA ESCOLA

Figura I.1.2: Logotipo da Escola Secundária Jorge Peixinho

O logotipo foi escolhido na sequência de um concurso lançado aos alunos da Escola Secundária Jorge Peixinho. A escolha do logotipo coube à Assembleia de Escola depois de ouvir o parecer do Conselho Pedagógico.
O símbolo atualmente adotado representa a fachada da escola, como entrada para um mundo novo e a passagem da puberdade à idade adulta. As cores amarelo e verde são as cores da cidade de Montijo.

I.1.2. Programa de Matemática A 11º ano

O programa de Matemática A para o 11º ano está dividido em três grandes temas:

A geometria no plano e no espaço;

Introdução ao cálculo diferencial I;

Sucessões.

No quadro que se segue é mostrada a planificação anual para cada um destes grande temas:

<table>
<tr><th>Período</th><th>Conteúdos</th><th colspan="2">Nº de blocos previstos</th></tr>
<tr><td rowspan="8">1º</td><td>Problemas que envolvam triângulos</td><td>4</td><td rowspan="8">35</td></tr>
<tr><td>Ângulo e arco generalizados; Círculo Trigonométrico</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Redução ao 1º Quadrante; Equações; Funções Trigonométricas</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Produto escalar de dois vetores: definição e propriedades</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Conjuntos definidos por condições; Equações de retas e planos; Paralelismo e perpendicularidade</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Programação Linear</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Funções racionais</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Avaliação e outras atividades</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2º</td><td>Funções racionais (continuação)</td><td>9</td><td rowspan="5">32</td></tr>
<tr><td>Derivadas</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Funções com radicais quadráticos ou cúbicos</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Sucessões</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Avaliação e outras atividades</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3º</td><td>Sucessões (continuação)</td><td>10</td><td rowspan="3">23</td></tr>
<tr><td>Limites de sucessões e convergência</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Avaliação e outras atividades</td><td>4</td></tr>
</table>

Quadro I.1.4: Quadro resumo da planificação anual da disciplina de Matemática A 11º ano

I.1.3. Manual adotado 11º ano

O manual adotado para dar cumprimento ao programa da disciplina é o seguinte:

Título: Novo Espaço: Matemática A – 11º ano

Autores: Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues

Editora: Porto Editora

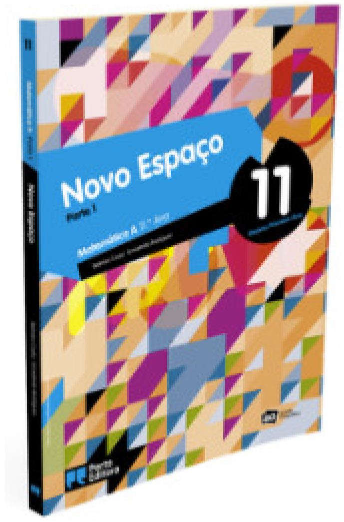


Figura I.1.3: Manual escolar adotado

Este manual está estruturado da seguinte forma:

- A geometria no plano e no espaço;
- Introdução ao cálculo diferencial I
- Sucessões.

Neste livro, para além dos conteúdos programáticos, encontram-se um sem número de tarefas, maioritariamente ligadas a situações reais, exercícios de margem, desafios e notas históricas.

Capítulo 2

Prática Letiva

I.2.1. Introdução

Esta secção irá abordar todas as atividades desenvolvidas durante o estágio pedagógico, bem como algumas reflexões, atividades dinamizadas pelo núcleo de estágio e algumas experiências mais significativas.

A orientação deste núcleo de estágio de Matemática foi da responsabilidade da Professora Teresa de Brito, sendo o núcleo formado por três alunos estagiários, Maria Félix, Marisa Barras e Ricardo Calado. As três turmas da professora orientadora, Teresa de Brito, foram distribuídas diplomaticamente pelos três estagiários, ficando a Maria de Jesus afeta ao 7ºI, a Marisa Barras ao 11ºB e o Ricardo Calado afeto ao 11ºC.

Durante os dois primeiros períodos letivos o horário dos estagiários compreendeu o horário das três turmas e mais quatro horas e meia semanais de reunião de núcleo de estágio. Durante o terceiro e último período os estagiários compareceram apenas às aulas da turma afeta e às reuniões de núcleo.

Os estagiários acompanharam, colaboraram e auxiliaram a professora orientadora em todos os assuntos da sua competência, nomeadamente, reuniões de grupo, reuniões de conselho de turma, atividades curriculares, visitas de estudo, concursos no âmbito da matemática, entre outros. A prática pedagógica teve início no dia 16 de setembro, contudo o primeiro encontro com a professora orientadora foi no dia 14 de setembro, para conhecimento de algumas diretrizes quanto à prática pedagógica e para a primeira reunião de conselho de turma do 7ºI.

Reflexão

"Hoje foi o meu primeiro dia de estágio na Escola Secundária Jorge Peixinho, com muita curiosidade e nervosismo dirigi-me à portaria para me encontrar com a professora Teresa de Brito. Tinhamos poucos minutos antes da reunião de conselho de turma do 7ºI, mas mesmo assim a professora orientadora apresentou-me tranquilamente a escola, tentando, gentilmente, clarificar todas as minhas dúvidas e questões, que diga-se de passagem, eram muitas!"

14 de setembro de 2011

I.2.2. Prática pedagógica supervisionada

Nas primeiras reuniões do núcleo de estágio foram compreendidos os objetivos gerais a cumprir pelos estagiários ao longo do ano letivo e foram disponibilizadas, de imediato, as planificações a médio prazo para o 11º ano e as planificações a longo prazo para o 7º e 11º anos de escolaridade. As planificações a médio prazo para o 7º ano foram elaboradas conforme a lecionação dos temas.

A professora Teresa aconselhou desde logo a organização de um dossier de estágio onde deveriam ser arquivados os documentos de caracterização das turmas, o registo e comentários efetuados nas reuniões de núcleo, as atas das reuniões assistidas pelos estagiários, as planificações de aula e das unidades didáticas, trabalhos, testes e fichas, entre outros documentos.

Antes da primeira experiência a lecionar, os estagiários envolveram-se com o projeto "A Escola e a Família", este projeto privilegia a participação das famílias na escola e um dos seus objetivos principais é envolver a família em atividades de aprendizagem em casa. Neste sentido foram elaboradas várias atividades de investigação, desafios e jogos educativos para enviar mensalmente aos alunos e às suas famílias.

A orientadora de estágio deixou bem sublinhada a importância do rigor e da clareza de uma planificação, sugerindo que, para a sua elaboração, os estagiários efetuassem uma pesquisa por diversas fontes, nomeadamente, as competências, indicações metodológicas e os objetivos propostos pelo Programa do Ministério da Educação, outros manuais escolares que não os adotados, artigos, etc.

Dada a referência frequente às novas tecnologias no programa, houve, sempre que se julgou necessário e adequado, recurso a ferramentas tecnológicas.

A primeira experiência como professora, numa sala de aula, ocorreu no dia 13 de outubro de 2011 com o 11ºB e teve como conteúdo a Redução ao 1º Quadrante inserido no tema Geometria no Plano e no Espaço II. A planificação e a escolha do material utilizado na lecionação (powerpoints, fichas formativas, fichas de trabalho, recursos adotados) foram efetuados pela estagiária, recorrendo sempre às observações e sugestões dadas pela professora orientadora. Este processo de análise e discussão construtiva dos planos de aula acompanhou os estagiários ao longo de todo o ano letivo.

Reflexão

"Nunca tinha passado pela maravilhosa experiência de ensinar numa sala de aula, enfrentar 22 alunos e conseguir mantê-los motivados e em silêncio, talvez fosse o meu maior receio, contudo a aula correu bem, o comportamento dos alunos foi bastante razoável e penso que, de uma forma geral, os alunos conseguiram compreender uma matéria, que até então, era desconhecida para eles. Não podia deixar de partilhar este momento, uma vez que foi, sem dúvida, um momento memorável para a minha carreira como professora de matemática.”

13 de outubro de 2011

No primeiro período foram planificadas e lecionadas nove aulas, inseridas na unidade curricular designada por Geometria no Plano e no Espaço II. Estas aulas encontram-se sintetizadas no quadro seguinte:

Aula / Data	**Conteúdos**
Nº 11 13/10/2011	▪ Redução ao primeiro quadrante o Relação entre razões trigonométricas de ângulos do 2º, 3º e 4º quadrantes com ângulos do 1º quadrante
Nº 13 19/10/2011	▪ Resolução de exercícios do manual sobre a matéria dada na aula anterior.
Nº 14 20/10/2011	▪ Estudo da função seno como função real de variável real. ▪ Identificação das suas principais características.
Nº 18 02/11/2011	▪ Estudo das funções cosseno e tangente como funções reais de variável real. ▪ Identificação das suas principais características.
Nº 23 15/11/2011	▪ Produto escalar de dois vetores e suas propriedades.
Nº 24 16/11/2011	▪ Expressão do produto escalar em função das coordenadas de dois vetores em relação a um referencial ortonormado.
Nº 25 17/11/2011	▪ Expressão do produto escalar em função das coordenadas de dois vetores em relação a um referencial ortonormado. ▪ Determinação do ângulo de duas retas no plano e no espaço.
Nº 27 23/11/2011	▪ Estudo da programação linear.
Nº 31 07/12/2011	▪ Resolução de problemas sobre programação linear.

Quadro I.2.1: Quadro síntese das aulas lecionadas no primeiro período

Os planos de aula e o material de apoio encontram-se no dossier e CD de Estágio Pedagógico.

Aulas Assistidas

A aula do dia vinte e três de novembro, contou com a presença da Professora Doutora Maria Helena Santos. Estas aulas tiveram como principal objetivo orientar os estagiários no sentido de lhes serem indicados alguns aspetos a melhorar durante a lecionação das aulas.

No segundo período foram planificadas oito aulas, inseridas na unidade didática designada por Introdução ao cálculo diferencial I. Funções Racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada. Nem todas as aulas dadas no 2º período se encontram na tabela abaixo, uma vez que quatro delas foram dadas em aulas extra curriculares. As aulas extra estão disponíveis numa tabela referente às mesmas.

Aula / Data	**Conteúdos**
Nº 44 19/01/2012	▪ Modelação de uma situação em contexto real utilizando funções racionais e as suas propriedades.
Nº 56 16/02/2012	▪ Modelação de uma situação em contexto real utilizando funções com radicais. ▪ Funções com radicais quadráticos ou cúbicos e respetivos domínios; ▪ Operações com radicais.
Nº 57 23/02/2012	▪ Funções com radicais quadráticos ou cúbicos; ▪ Operações com radicais. ▪ Potências de expoente fracionário. ▪ Função inversa da função potência.
Nº 58 28/02/2012	▪ Funções com radicais quadráticos ou cúbicos. ▪ Operações com radicais. ▪ Equações irracionais.
Nº 64 14/03/2012	▪ Sinal da função derivada e sentido de variação. ▪ Extremos de uma função.
Nº 65 15/03/2012	▪ Sinal da função derivada e sentido de variação. ▪ Extremos de uma função. ▪ Problemas de otimização usando a função derivada.

Quadro I.2.2: Quadro síntese das aulas lecionadas no segundo período

Aulas Assistidas

O segundo período contou com duas aulas assistidas, nos dias catorze e quinze de março, pela Professora Doutora Maria Helena Santos e pelo Professor Doutor Filipe Marques. Após a lecionação, o grupo de estágio reunia com os professores para ser feito um balanço da aula. Os estagiários tentaram aproveitar ao máximo todo o rigor científico que essas reuniões lhes proporcionavam.

No terceiro período foram planificadas e lecionadas sete aulas. Cinco aulas à turma do 7ºI, uma aula ao 11ºB e uma aula 11ºC. O grande conteúdo lecionado nas aulas de 7º ano foi as Escalas, inserido na Unidade Geometria, no 11º ano o grande tema abordado no 3º período foi Sucessões Reais.

Observe-se que as aulas de 11º ano decorreram num contexto de modelação matemática.

No primeiro quadro encontra-se a síntese das aulas dadas à turma do 7ºI e no segundo quadro encontram-se as aulas dadas ao 11ºB e 11ºC.

Aula / Data	Conteúdos
Nº 161 e 162 14/05/2012	▪ Escalas.
Nº 162 e 163 15/05/2012	▪ Continuação do sumário da aula anterior.
Penúltima aula 12/06/2012	▪ Autoavaliação.

Quadro I.2.3: Quadro síntese das aulas lecionadas no terceiro período ao 7º ano de escolaridade

Aula / Data	Conteúdos
Nº 79 08/05/2012	▪ Sucessão de termo geral $(1+1/n)^n$ num contexto de modelação matemática. ▪ Número de Neper.
Nº 80 09/05/2012	▪ Sucessão de termo geral $(1+1/n)^n$ num contexto de modelação matemática. ▪ Número de Neper.

Quadro I.2.4: Quadro síntese das aulas lecionadas no terceiro período ao 11º ano de escolaridade

Todas as aulas foram supervisionadas pela orientadora de estágio. Após cada aula o núcleo reunia com a professora, para que esta desse a conhecer o seu parecer sobre alguns aspetos das aulas, no sentido de partilhar a sua vasta experiência e melhorar a lecionação de cada estagiário. Estes momentos constituiram um elemento muito importante de aprendizagem e conhecimento.

A aula do dia 12 de junho, foi a única aula, de todas as que foram sintetizadas nos quadros supracitados, dada sem a presença da professora Teresa de Brito, uma vez que a mesma teve que assegurar o serviço de secretariado de exames. Nesta aula foi proposto aos alunos que escrevessem um texto sobre a sua autoavaliação ao longo do ano letivo. Como este processo de autoavaliação não ocupou todo o tempo da aula, a professora estagiária decidiu pedir aos alunos desta turma um desenho de despedida.

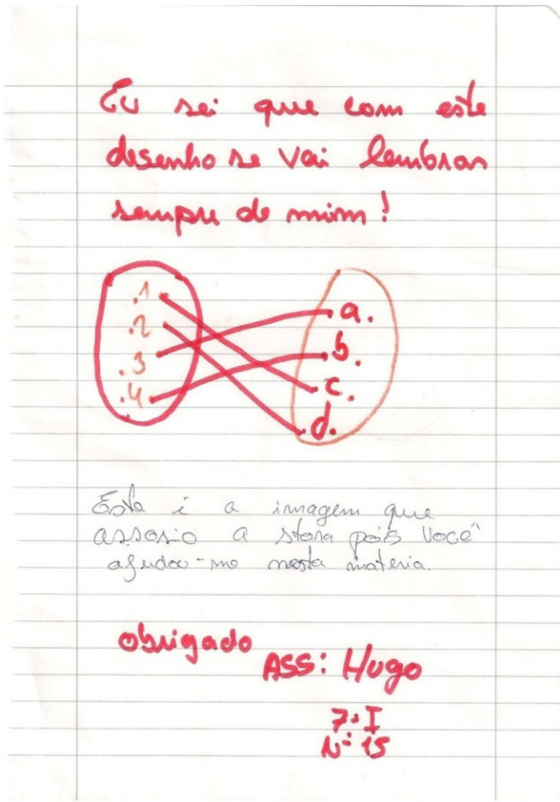


Figura I.2.1: Desenho de despedida de um dos alunos do 7ºI

Aulas Assistidas

As aulas dos dias oito e catorze de maio contaram com a presença da Professora Doutora Maria Helena Santos e do Professor Doutor Filipe Marques.

I.2.3. Aulas extra

Alguns problemas de modelação matemática encontrados nos manuais envolvem funções trigonométricas, matéria que já tinha sido lecionada no primeiro período. Para não existirem interrupções na matéria, foi de comum acordo, entre a professora orientadora e a estagiária, que os alunos do 11ºB frequentassem uma aula de modelação matemática num horário extra curricular. Os alunos mostraram-se disponíveis e compareceram quase na totalidade numa quarta-feira pelas 14h.

Atente-se que estas aulas decorreram apenas na presença da professora estagiária.

A segunda aula extra foi uma aula de preparação para o teste intermédio. Foram resolvidos exercícios de escolha múltipla e escritas composições matemáticas sobre a matéria dada no primeiro período, nomeadamente, Trigonometria e Produto escalar entre dois vetores.

A terceira aula extra foi dada à turma do 11ºC. Os conteúdos lecionados já tinham sido explorados no dia 28 de fevereiro na turma do 11ºB

A última aula extra foi uma aula de substituição de matemática a uma turma de 7º ano. O núcleo de estágio assegurou a lecionação nas turmas da professora Manuela Afonso, que não pode comparecer por motivos de falecimento de um familiar próximo.

Aula / Data	**Conteúdos**
Nº 1 25/01/2012	▪ Modelação de uma situação em contexto real utilizando funções trigonométricas.
Nº 2 08/02/2012	▪ Composição escrita envolvendo problemas de Trigonometria e Produto escalar entre dois vetores e Trigonometria. ▪ Escolha múltipla que contempla exercícios globais sobre a matéria dada.
Nº 3 05/03/2012	▪ Funções com radicais quadráticos ou cúbicos; ▪ Operações com radicais; ▪ Equações irracionais.
Nº4 15/03/2012	▪ Revisões sobre a função de proporcionalidade direta.

Quadro I.2.5: Quadro síntese das aulas extra lecionadas ao longo do ano letivo

Reflexão

Mais uma nova experiência fantástica! Ainda não tinha tido a oportunidade de estar na sala de aula sem a presença omnipotente e omnipresente da professora orientadora e dos meus colegas estagiários. Para mim foi uma experiência muito interessante e elucidativa, no sentido de conseguir provar a mim mesma que conseguiria ensinar mantendo a ordem dentro da sala de aula, tanto na turma do 11º ano como na turma do 7º ano.

I.2.4. Acompanhamento a dois alunos problemáticos

O 7ºI é uma turma dita característica para este nível de escolaridade, no sentido dos alunos serem portadores de uma energia fora de série, sempre agitados, com o tom de voz ligeiramente acima do que é suposto e com uma enorme vontade de saltar para fora da sala de aula.

No início do ano os professores estagiários sentaram-se como era habitual na última fila de mesas da sala, contudo rapidamente se chegou à conclusão que existiam demasiados elementos perturbadores nas aulas de matemática do 7ºI, pelo menos quatro alunos mostraram um comportamento demasiado barulhento e destabilizador. Assim, os estagiários foram redistribuídos estrategicamente para evitar o ruído e o mau comportamento desses mesmos alunos.

Reflexão

Não obstante a psicologia e tudo o que podemos ler sobre assuntos relacionados com alunos problemáticos, para mim foi uma excelente experiência. Está certo que não é nada fácil estar todo o ano letivo entre dois elementos perturbadores, mas é muito gratificante, quando parecia não existir qualquer esperança e se começam a ver alguns resultados. É, sem dúvida, uma boa experiência para tentar motivar os alunos, neste caso os dois repetentes e sem grandes objetivos para o futuro, e entender que cada aluno tem as suas particularidades, constatando que o que é motivador para um aluno poderá não ser para outro.

Num dos casos não consegui grandes melhorias, a falta de interesse pelas aulas de matemática era uma constante e as classificações dos testes sempre negativas. No outro caso, creio ter a minha cota parte de responsabilidade pelo interesse do aluno em tirar positiva a matemática no final do período. É verdade que o aluno ainda não conseguiu atingir esse objetivo, contudo são cada vez mais visíveis as suas classificações positivas nos testes. O aluno continua com o objetivo de conseguir passar a matemática.

Para mim algo igualmente importante é o respeito que estes dois alunos tiveram por mim ao longo deste ano letivo.

I.2.5. Testes e fichas de avaliação

A professora orientadora, seguindo sempre de perto todo o processo, permitiu ao núcleo de estágio paticipar sempre na elaboração dos testes, tanto no 11º ano como no 7º ano de escolaridade, desde a escolha dos seus conteúdos à definição dos critérios de correção dos mesmos. Foi um processo conjunto de muita aprendizagem.

No que concerne à correção dos testes, numa primeira abordagem e depois da professora orientadora explicar e mostrar o seu método de correção, insistiu para que os estagiários corrigissem, individualmente, três testes do 11º ano. Posteriormente as correções de cada estagiário foram sujeitas a uma discussão do núcleo.

Mais tarde a professora orientadora permitiu a correção de vários testes e fichas do 7º e 11º anos de escolaridade, tanto em grupo de estágio, como individualmente para posterior discussão.

Reflexão

Felizmente foi-me permitida a correção individual de todos os testes da turma 11º B. E apesar das posteriores discussões do núcleo sobre as minhas correções, confesso que sermos nós próprios a corrigir os erros dos alunos nos aproxima muito das suas dificuldades particulares e ajuda-nos a ficar com um campo muito maior de visão no que concerne à comparação entre eles.

Tive também o privilégio e a responsabilidade de corrigir individualmente todos os testes intermédios da minha turma afeta, 11ºB. Foi sem dúvida mais uma excelente experiência como professora estagiária.

I.2.6. Avaliação dos alunos

A avaliação dos alunos foi outro processo conjunto e discutido em núcleo de estágio.

A professora orientadora facultou os critérios gerais de avaliação aprovados em conselho pedagógico e os critérios específicos da disciplina de Matemática para o ensino básico e de Matemática A para o ensino secundário, aprovados em reunião de departamento.

A avaliação é um processo contínuo e como tal não foi tratado apenas no final de cada período letivo. A meio de cada período a professora facultou, para preenchimento, a cada estagiário a ficha de informação intermédia de avaliação. Nesta ficha foram avaliados o aproveitamento, a participação, o comportamento e os trabalhos de casa dos alunos. No final de cada período o núcleo de estágio conjuntamente com a orientadora analisaram cada aluno individualmente, tendo sempre em conta os critérios gerais e específicos de avaliação, os testes, as fichas de trabalho e avaliação e as fichas de informação intermédia de avaliação.

I.2.7. Reuniões

Reuniões de orientação de estágio

O núcleo de estágio reunia três vezes por semana, das 10h10 às 11h40 às segundas-feiras, das 17h às 18h30 às terças-feiras e das 8h30 às 10h às quintas-feiras, ou seja, um total de quatro horas e meia semanais distribuídas ao longo deste ano letivo.

Estas reuniões em muito contribuiram para o enriquecimento dos estagiários, uma vez que era nestas sessões que decorria a maior partilha de conhecimento.

A professora orientadora disponibilizou aos estagiários toda a informação essencial à engrenagem de uma escola, forneceu por exemplo, o Regulamento Interno da Escola, Plano anual de Atividades, o Projeto Educativo, o Regimento do Grupo 500, o Regimento do Departamento, o Calendário Escolar, entre outros documentos.

Também foi fornecido aos estagiários um registo de dados recolhidos na observação de aulas, para melhor se entender o conteúdo desse registo citam-se dois dos seus pontos: "O professor teve a preocupação de apagar o quadro sempre que foi escrever algo que não estivesse relacionado com o que lá estava escrito? O professor teve a preocupação de não deixar os alunos passarem nada do quadro enquanto decorria a sua explicação?".

A resolução, correção e definição de critérios de correção de testes, fichas de avaliação e fichas de trabalho, foram afincadamente discutidos nestas reuniões, também como as planificações a médio prazo, as planificações de aula, a calendarização de aulas a lecionar pelos estagiários, a avaliação dos alunos e resultados por eles obtidos.

Os projetos e concursos também foram tema de conversa destas reuniões, nomeadamente, o Projeto "A Escola e as Famílias", o Concurso Pitágoras 7, Pitágoras 11, as Olimpíadas da Matemática, World Maths Day e o Cangurú Matemático.

A professora orientadora oferece aos seus alunos um rigor minucioso na forma como apresenta e leciona as suas aulas, assim o núcleo de estágio só teve a ganhar com o contacto permanente com este obrigatório rigor matemático.

Reuniões de Grupo

Nestas reuniões são discutidos vários assuntos, tais como, a análise dos conteúdos programáticos da disciplina de Matemática, a aferição de critérios de avaliação, a elaboração das planificações a longo e a médio prazo, as atividades a realizar em sala de aula, as possíveis estratégias para o cumprimento dos planos, a calendarização dos testes e a elaboração das respetivas matrizes.

Reflexão

Dado o horário semestral das unidades curriculares lecionadas na Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa durante todo o ano letivo, não tive muitas oportunidades de comparacer às reuniões. Contudo, consegui comparecer a uma reunião de grupo do 7º ano de escolaridade, no dia 18 de janeiro de 2012 onde pude constatar alguma da informação acima descrita.

Reuniões do Conselho de Turma

No final de cada período realizam-se as reuniões de conselho de turma. No início de cada reunião estão presentes dois alunos representantes da turma, o delegado e o subdelegado, e o representante dos pais e encarregados de educação. Posteriormente, depois de serem ouvidas todas as partes afetas, os alunos e o encarregado de educação abandonam a sala para que os professores possam concluir sobre a avaliação individual dos alunos e delinear estratégias de combate ao insucesso escolar.

Reflexão

Estive presente em quatro reuniões de conselho de turma, duas do 7ºI, uma do 11ºB e uma do 11ºC. A minha primeira reunião de conselho de turma foi no dia 14 de setembro, uns dias antes de iniciarem as aulas.

Este foi o meu primeiro contacto com os alunos do 7ºI, uma vez que fiquei a conhecer, não só os professores de todas as disciplinas da turma, mas também os nomes dos alunos repetentes e dos alunos com algumas dificuldades cognitivas.

As restantes reuniões foram realizadas no final do primeiro período, duas no dia 19 de dezembro e outra decorreu no dia 20 do mesmo mês.

Nestas reuniões tomamos verdadeiro conhecimento dos nossos alunos, fiquei surpreendida ao saber que alunos na aula de matemática tinham um determinado comportamento e na aula de outra qualquer disciplina tinham um comportamente totalmente distinto.

Reuniões do Departamento

Estas reuniões permitem que os professores, que integram o departamento, em conjunto tomem posição sobre assuntos de interesse da escola.
Alguns dos assuntos tratados nestas reuniões prendem-se com o regime de faltas, os planos de recuperação a aplicar aos alunos, as substituições e permutas entre professores, o planeamento das visitas de estudo, a discussão do regimento do departamento, entre outros.

Reflexão

Participei em duas reuniões de departamento, uma no dia 18 de janeiro de 2012 e outra no dia 8 de fevereiro de 2012.
Nestas duas reuniões os temas abordados passaram por distinguir as novas metas curriculares para a disciplina de Português e para a disciplina de Matemática, relembrar datas de concursos próximos e relatar problemas com os manuais.

Reuniões de Encarregados de Educação

Mesmo não sendo obrigatória a sua presença nas reuniões de encarregados de educação, a professora orientadora do estágio gosta de dar o exemplo aos seus estagiários e faz questão de estar presente nas mesmas. Assim, os três estagiários estiveram presentes em algumas destas reuniões para as três turmas de que a professora orientadora é responsável.
Nas reuniões de encarregados de educação, tanto pais como professores trocam opiniões e ideias sobre os alunos, as suas principais dificuldades, a turma no geral e sobre processos de maximização do rendimento da turma.

Reflexão

Não conseguindo esclarecer quais os dias exatos em que compareci às reuniões de encarregados de educação, estive presente em duas reuniões para a turma do 7ºI, uma reunião para o 11ºB e uma reunião para o 11ºC. Parece-me que de todas as reuniões aqui descritas, esta é uma das mais delicadas, dado que existem variadas opiniões que podem divergir e não gerar um consenso que permita chegar a uma conclusão construtiva.

I.2.8. Projeto A Escola e as Famílias

Figura I.2.2: Logotipo do Projeto "A Escola e as Famílias"

O Projeto a Escola e as Famílias está inserido no Plano Anual de Atividades da Escola Secundária Jorge Peixinho e surgiu da necessidade de aumentar a participação da família na escola. As professoras dinamizadoras deste projeto são a professora Teresa de Brito, orientadora do estágio, a professora Manuela Afonso, a professora Paula Tapadinhas e os estagiários Maria Félix, Marisa Barras (autora deste relatório) e Ricardo Calado. Na escola de hoje, devido a problemas diversos, é fundamental que o binómio Escola – Família funcione da melhor forma possível, de modo a que os professores consigam compreender e ultrapassar, com sucesso, as dificuldades manifestadas pelos seus alunos.

Algumas estratégias para conseguir atingir o objetivo nuclear, ou seja, aumentar a participação das famílias na escola, passaram pela:

- Criação do e-mail/moodle das turmas envolvidas no projeto para enviar todos os documentos relacionados com o mesmo, no sentido de envolver os pais na escola, "Sete maneiras de envolver os pais na escola", "Serão Matemático", "Serão de Leitura", "Jogos Educativos"e "Campanhas de Solidariedade";

- Sensibilização dos encarregados de educação das turmas 7ºA, 7ºC, 7ºD, 7ºI, 9ºE, 9ºI, 11ºA, 11ºB, 11ºC e 11ºD, na primeira reunião de pais, através da presença das professoras dinamizadoras do projeto, no sentido de aumentar a sua participação na escola;

- Divulgação, nessa mesma reunião, de várias atividades que envolvam as famílias:

    - Frequência no ClubMath e Escola Aleph onde serão realizadas atividades lúdicas de cariz matemático.
    - Palestra "Profissão: Matemático!".
    - Palestra "A Matemática e a Música".
    - Construção de relógios de sol.

- Divulgação de propostas de projetos que envolvam a escola e as famílias e promovam a prestação de serviços à comunidade;

As atividades propostas para este ano letivo foram:

- Participação no Fórum SerVoluntário Faz a Diferença (1º período);
- Realização de Palestras (2º e 3º períodos);
- Exposição de trabalhos realizados pelos alunos incluindo os relógios de sol (3º período);
- Entrega de prémios aos vencedores dos Concursos Pitágoras 7 e Pitágoras 11 (3º período);
- Realização de Campanhas de Solidariedade e de recolha de tampas plásticas com o objetivo de apoiar instituições de solidariedade (ao longo do ano);
- Espaço de diálogo, "Gabinete de apoio às Famílias".

O núcleo de estágio no início do ano letivo dedicou-se à pesquisa e posterior realização de atividades de investigação, desafios e jogos educativos para serem enviados mensalmente por e-mail, no âmbito do serão matemático, para os alunos dos sétimos e décimos primeiros anos de escolaridade.

Campanhas de solidariedade

Foi também criado um espaço para a recolha de alimentos, tais como conservas, arroz, massa, açúcar, bacalhau, etc, para a Cruz Vermelha do Montijo. Para a Loja Social do Montijo foram angariados e doados bens, nomeadamente roupa, calçado, alimentos.

A Campanha Tampinhas consistiu na recolha de tampas plásticas para adquirir uma cadeira de rodas.
Como já era de esperar as famílias aderiram a estas campanhas e participaram com aquilo que podiam.
Nem todas as atividades propostas pelas professoras dinamizadoras do projeto foram levadas a cabo. A Palestra "Profissão: Matemático!" não se realizou por problemas logísticos, ou seja, dado que as obras de recuperação da escola não terminaram no prazo previsto no início do ano, não existiu um espaço físico com capacidade para a realização da palestra.

Figura I.2.3: Campanha Tampinhas

I.2.9. Concursos Matemáticos

A professora orientadora proporcionou aos estagiários um contacto ativo nos concursos matemáticos dinamizados pela escola Secundária Jorge Peixinho.
Estas competições têm como essência comum a resolução de problemas matemáticos com base no desenvolvimento do raciocínio demonstrativo, estimulando assim a aprendizagem e o gosto pela matemática. Houve um maior envolvimento dos estagiários, no que concerne a todo o processo de realização e organização do concurso, nos concursos Pitágoras 7 e Pitágoras 11.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

Figura I.2.4: Logotipo das Olimpíadas de Matemática

As Olimpíadas da Matemática são um concurso organizado pela Sociedade Portuguesa de Matemática. É um evento que está aberto à participação livre de alunos do 2º e 3º ciclo do ensino básico e do ensino secundário. Este é o concurso que tem um formato mais tradicional, tratando-se de um teste individual realizado em suporte papel e sem recurso a calculadora, com duração de 2 horas.

Os estagiários Ricardo Calado e Marisa Barras ficaram encarregues de vigiar os alunos de uma das salas onde decorreu as Olimpíadas da matemática.

Concurso Pitágoras

Figura I.2.5: Logotipo do Concurso Pitágoras

O Pitágoras é um concurso que consiste na realização de um teste escrito, baseado na resolução de problemas de matemática ligados a situações da realidade. Este evento é dirigido, este ano letivo, aos alunos de Matemática do 7.º ano e aos alunos de Matemática A do 11º ano, Pitágoras 7 e Pitágoras 11, respetivamente. O concurso é organizado pelas professoras que lecionam as referidas disciplinas e os mestrandos do mestrado Ensino da Matemática, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

Este foi, sem dúvida, o concurso que teve mais envolvimento por parte dos estagiários. As provas foram realizadas na íntrega pelo núcleo de estágio e a correção das mesmas também ficou a seu cargo.

As turmas de 7º ano participantes neste concurso foram o 7ºC, 7ºE, 7ºF, 7ºG e 7ºI, sendo a última uma das turmas da professora orientadora de estágio.

As turmas de 11º ano participantes no concurso foram o 11ºA, 11ºC e 11ºD, sendo o 11ºC uma das turmas do 11º ano de escolaridade seguidas pelo núcleo de estágio.

Aos alunos participantes é atribuído um certificado de presença e aos alunos que se encontram nos três primeiros lugares é atribuído um diploma.

Reflexão

Foi com muito entusiasmo e orgulho que constatei um segundo lugar no concurso Pitágoras 7 para um aluno do 7ºI e um segundo e terceiro lugares no concurso Pitágoras 11 para dois alunos da turma 11ºC. É sempre muito compensador vermos um aluno nosso nos três primeiros classificados, contudo confesso que fiquei com muita pena dos alunos da minha turma afeta não terem participado em nenhum dos concursos dinamizados pela escola.

Canguru Matemático

Figura I.2.6: Logotipo do Canguru Matemático

O Canguru Matemático é um concurso de “matemática para todos”, a organização deste concurso é da responsabilidade do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra (FCTUC), com o apoio da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM). Este concurso anual consiste na realização de um teste escrito, onde os melhores alunos de cada escola têm a possibilidade de receber um diploma com a sua classificação.

As estagiárias Maria de Jesus e Marisa Barras ficaram responsáveis por vigiar as provas no âmbito desta competição.

World Maths Day

Figura I.2.7: Logotipo do World Maths Day

World Maths Day é um evento internacional que consiste na realização de provas constituídas por perguntas e problemas, dadas em simultâneo, a alunos do mesmo nível de países de todo o mundo. Os alunos da mesma faixa etária competem uns contra os outros gerando assim um ambiente de competição interessante e entusiasta.

Neste concurso participam alunos dos 4 aos 18 anos de idade, divididos por quatro escalões etários.

Os estagiários inscreveram os alunos neste concurso via internet e indicaram todas as informações necessárias aos mesmos para a sua participação neste evento.

I.2.10. Visita de estudo

No dia 1 de fevereiro, no âmbito da disciplina de matemática, três turmas do 11º ano, duas das quais turmas sob a orientação da professora Teresa, realizaram uma visita de estudo à Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa (FCT – UNL).

Esta visita de estudo teve como principais objetivos incentivar o gosto pela disciplina, reforçar a componente lúdica na aprendizagem da matemática, resolver problemas de programação linear, aprofundar e ampliar os conhecimentos sobre funções na compreensão de fenómenos exteriores em liguagem gráfica e promover o nível de excelência dos alunos.

Chegados à FCT-UNL os alunos calcorrearam parte da faculdade até chegar ao pavilhão IV onde se deu início à palestra sobre *A Matemática na deteção de risco de morte cardíaca em eletrocardiogramas*.

De seguida foram oferecidas aos alunos uma panóplia de atividades computacionais que relacionavam a matemática com a realidade de uma forma interessante e original, nomeadamente:

Atividade – Voa, Voa, milionário

Pretendia-se com esta atividade que os alunos descobrissem um percurso no mapa, minimizando a distância total percorrida e visitando todas as cidades de uma única vez, regressando ao ponto de partida.

Figura I.2.8: Imagem da Atividade "Voa, Voa, milionário"

Atividade – Vem jogar na nossa slot machine

Pretendia-se com esta atividade que os alunos atribuissem probabilidades de ocorrência das "figuras" da slot machine de forma a garantir a satisfação simultânea de certas exigências, quer dos jogadores quer da Administração do Casino.

Figura I.2.9: Imagem da Atividade "Vem jogar na nossa slot machine"

Atividade – De regresso ao Lego…

Pretendia-se com esta atividade que os alunos construissem mesas e cadeiras com peças de Lego (tipo 4x2 e 2x2) com o objetivo de maximizar o lucro.

Figura I.2.10: Imagem da Atividade "De regresso ao Lego…"

Reflexão

A visita de estudo está em tudo relacionada com a Modelação Matemática, foi com muito gosto que vi os alunos interessados pela disciplina, verificando que a matemática se pode aplicar em variadas situações interessantes da vida real. Foi um excelente complemento à aulas de modelação dadas por mim.

Sem dúvida que a oportunidade de participar nesta visita de estudo fortaleceu os laços entre os professores e os alunos.

I.2.11. Outras atividades

Nos meses de abril e maio o núcleo de estágio participou nas sessões de apresentação dos novos projetos escolares para a Matemática do 9º ano de escolaridade e Matemática A do 12º ano de escolaridade pela Porto Editora, Asa e Texto Editora.

No dia 6 de junho os estagiários, Marisa Barras e Ricardo Calado, participaram na sessão de entrega de prémios relativos aos concursos matemáticos acima referidos. Esta pequena cerimónia contou com a presença de professores, alunos e encarregados de educação da Escola Secundária Jorge Peixinho.

Os presentes tiveram também a oportunidade de serem informados acerca das potencialidades de uma licenciatura em matemática, numa pequena palestra dirigida pelo Doutor Paulo Doutor, professor na FCT-UNL.

PARTE II

RELATÓRIO DO TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO NA PRÁTICA PEDAGÓGICA

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

II.1.1. A pertinência do tema

Ao ingressar no mercado de trabalho muitos são os recém-licenciados que sentem dificuldade na aplicação do conhecimento mobilizado ao longo dos anos, por exemplo, em projetos reais que lhes são entregues. Toda a informação disponibilizada e aprendida parece encontrar-se em compartimentos, que para além de parecer não se relacionarem entre si, não se relacionam com a realidade que lhes chega agora à queima-roupa.

Talvez o ensino ainda peque por oferecer muita teoria e pouca ligação ao mundo real, talvez uma maior e clara aplicação prática dos conteúdos curriculares proporcione aos alunos a tão desejada "descompartimentação" de conhecimentos.

Então, porque não relacionar a matemática com a realidade em sala de aula? Porque não verificar se os alunos utilizam, aplicam e relacionam os seus conhecimentos matemáticos num contexto de modelação matemática ou de resolução de problemas reais? Porque não relacionar a matemática com as outras disciplinas, tais como biologia, geografia, economia, física e química e até mesmo com outras áreas como engenharia, arte, astronomia e economia? Será que a aplicação da modelação matemática na sala de aula, ajuda à compreensão e resolução de problemas de outras disciplinas? Será possível que a modelação matemática e a resolução de problemas reais aumente o desempenho dos alunos em situações problemáticas do seu quotidiano e até na sua futura vida profissional?

Assim, na tentativa de responder a algumas das questões supracitadas, será bastante pertinente fazer uma investigação, num contexto de aplicação da modelação matemática em sala de aula, com os alunos de uma turma da Escola Secundária Jorge Peixinho. Talvez a observação dos alunos quando confrontados com atividades ligadas ao real, dite algumas respostas deveras interessantes.

II.1.2. A escolha das questões

Dado o variado e infindável leque de questões que podem surgir quando este tema é abordado, surge a necessidade de distinguir quais as que realmente são indispensáveis a este estudo.

O foco central desta investigação aponta para os saberes dos alunos num contexto de exploração e aplicação da modelação matemática e também para as suas principais dificuldades no decorrer deste processo, ou seja:

- Como se posicionam os alunos perante situações problemáticas do mundo real? Destacando os saberes dos alunos e as suas principais dificuldades.
- Os alunos mobilizam os seus conhecimentos matemáticos num contexto de modelação matemática ou na resolução de problemas reais?
- Será possível desenvolver nos alunos uma atitude crítica perante a realidade e estimular as suas capacidades em situações problemáticas reais?

II.1.3. A relação com o currículo português

No programa de Matemática do ensino secundário de 1991, surgem indícios institucionais de que é necessária a alteração das práticas letivas do processo de ensino e aprendizagem da matemática. Nos objetivos gerais, no âmbito das capacidades/aptidões, o objetivo desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real dá sinais da emergência da ligação do ensino da matemática ao dia a dia dos alunos.

Em 1997, quando é efetuado o ajustamento do programa de Matemática, é notoriamente verificado um reforço dos objetivos que recorrem a uma nova abordagem no processo de ensino e aprendizagem. Ao nível das finalidades da disciplina é destacada a intencionalidade de: "desenvolver a capacidade de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade" (ME, 1997, p. 3). Este objetivo procura apelar para que os alunos se tornem participativos e conscientes das suas necessidades de aprendizagem.

Ainda nas orientações metodológicas do mesmo documento é dada importância à escolha de atividades a propor aos alunos em sala de aula:

> Destaca-se a importância das atividades a selecionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjeturar,

> experimentar, provar, avaliar e ainda o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação. (ME, 1997, p. 8)

No que concerne aos programas de Matemática A, homologados pelo Ministério da Educação em 22 de fevereiro de 2001 (10ºano), 1 de abril de 2002 (11ºano) e 17 de maio de 2002 (12ºano) podem encontrar-se sinais de que a administração central fez alterações, em particular, no que diz respeito à resolução de problemas e à modelação matemática:

> Muitos problemas foram, são e serão resolvidos sem recurso a notações científicas e às ferramentas de cálculo tal como a comunidade matemática as conhece hoje. Um cidadão com formação secundária necessita mais de noções que de notações para enfrentar as situações que precise de compreender (e esclarecer) e os problemas que tenha de resolver. Não quer isto dizer que o trabalho com as ferramentas matemáticas possa ser posto de lado no ensino secundário, mas antes quer dizer que o uso das ferramentas é ensinado e aprendido no contexto das ideias e da resolução de problemas interessantes, enfim em situações que exijam o seu manejo e em que seja clara a vantagem do seu conhecimento. (ME, 2001, p. 5)
>
> A análise de situações da vida real e a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, constituem uma oportunidade de abordar o método científico. Em todos os temas do programa de matemática (Geometria, Funções e Estatística) se podem encontrar ferramentas fundamentais de modelação. O papel da matemática como instrumento de modelação da realidade é incontornável: um modelo matemático é uma descrição matemática do mundo real. A resolução de problemas, meio privilegiado para desenvolver o espírito de pesquisa, deve contemplar, além de situações do domínio da Matemática, outras, da Física, da Economia, da Geometria Descritiva, … (ME, 2001, p. 11)

Nas indicações metodológicas do referido documento verifica-se que:

> Sempre que possível, o professor deve evidenciar aplicações da Matemática e deve estabelecer conexões entre os diversos temas matemáticos do currículo e com outras ciências. Este trabalho não deve resumir-se ao enunciado e resolução de problemas realistas que usam conhecimentos de diversas ciências. Deve ser discutido com os estudantes o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo atual. (ME, 2001, p. 20)

Em suma, no currículo português a modelação matemática é parte integrante dos conteúdos programáticos, atravessando de forma transversal todo o programa. Para reforçar esta ideia é indicado que o papel da matemática como instrumento de modelação da realidade é incontornável.

Capítulo 2

Revisão da literatura

Este capítulo inicia com uma breve referência à iniciativa do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), uma vez que se torna interessante verificar a forte presença de temas como a resolução de problemas, investigações matemáticas e mais tarde a modelação matemática em sala de aula, neste movimento de reforma preconizado por este Conselho.

De seguida são identificados e definidos alguns conceitos necessários à compreensão deste estudo, tais como, resolução de problemas, investigações matemáticas, matematização, modelo matemático e modelação matemática.

A revisão da literatura termina com a apresentação de alguns resultados de estudos realizados por outros autores, que envolveram problemas de modelação matemática.

II.2.1. Movimento de renovação do currículo

No início da década de 80, conheceu-se um novo movimento de reforma do ensino da Matemática. O NCTM, dos Estados Unidos da América, sugeriu a resolução de problemas como o centro do ensino da matemática, associada à aprendizagem de estratégias e ao desenvolvimento de atitudes.

O maior movimento internacional, no âmbito do ensino da Matemática, iniciou-se nos finais dos anos 80 com a publicação das "Normas para o currículo e avaliação da matemática escolar", da iniciativa do NCTM. Estas normas foram traduzidas em português, e editadas pela APM em 1991 e a sua principal mensagem era a de que a matemática escolar deve levar o aluno a desenvolver o seu poder matemático:

> O poder matemático... refere-se às capacidades de um indivíduo para explorar, conjeturar e raciocinar logicamente, bem como à sua aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros. Esta noção é baseada no reconhecimento que a matemática é muito mais do que uma coleção de conceitos e

> capacidades a adquirir; ela inclui métodos de investigação e de raciocínio, meios de comunicação e noções de contexto. (NCTM, 1991, p. 6).

Em 1991, é publicado pelo NCTM o documento, "Normas profissionais para o ensino da matemática", traduzido em 1994 pela APM e onde muito resumidamente são destacados, como principais sugestões para a melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática, o uso das novas tecnologias e a resolução de problemas na sala de aula.

Em 2000, o NCTM publica o livro, "Principles of Standards for School Mathematics", onde enfatiza mais uma vez a importância da resolução de problemas e de tarefas de investigação para a compreensão de determinados conceitos matemáticos. No mesmo documento, é ainda referido que resolver problemas pode ser bastante importante e útil na vida quotidiana e até mesmo na profissão de cada um, tornando-se assim, não apenas, um objetivo do ensino/aprendizagem da matemática, mas também, um dos seus aspetos mais importantes.

Segundo o NCTM (1991), o ensino da Matemática deve ser encarado numa perspetiva que promova a capacidade de construir conceitos, modelos e teorias, possibilitando ao aluno aprender e atribuir significado, não só aos conhecimentos, mas também aos vários campos de aplicação da matemática. Neste contexto, a resolução de problemas e as atividades de modelação constituem meios pelos quais os alunos podem construir e salientar conexões entre ideias matemáticas e entre a matemática e a realidade, sendo a natureza das atividades a aplicar na sala de aula uma questão fundamental.

O NCTM (1994) refere que as boas propostas de atividades são aquelas que não separam o pensamento matemático dos conceitos matemáticos, que despertam a curiosidade dos alunos e os convidam a especular e a prosseguir com as suas intuições.

Uma visão geral das normas, referidas anteriormente, indica que o raciocínio matemático, a resolução de problemas, a comunicação e as conexões devem ter um papel central no ensino da Matemática. Refere também que os algoritmos matemáticos, a manipulação de expressões e a prática com papel e lápis não devem continuar a dominar a matemática escolar. (NCTM, 1994)

Estas normas definem objetivos para a aprendizagem da matemática, em todos os níveis de ensino, desde o pré-escolar ao ensino secundário (NCTM, 2000):

- Aprender a dar valor à matemática;
- Adquirir confiança na sua própria capacidade de fazer matemática;
- Tornar-se apto a resolver problemas de matemática;

- Aprender a comunicar matematicamente;
- Aprender a raciocinar matematicamente.

Em suma, a principal mensagem do NCTM, para o ensino e a aprendizagem da matemática, é que a matemática escolar deve levar o aluno a desenvolver as suas capacidades para explorar, conjeturar e raciocinar logicamente utilizando métodos matemáticos não rotineiros, sublinhando que os algoritmos matemáticos e a prática com papel e lápis não devem continuar a dominar a matemática escolar. O uso das novas tecnologias, as atividades de modelação matemática e a resolução de problemas reais em sala de aula, são destacados como as principais sugestões para a melhoria do ensino e da aprendizagem, possibilitando ao aluno, não só, aprender e atribuir significado aos seus conhecimentos e aos vários campos de aplicação da matemática, mas também, construir conexões entre a matemática e a realidade.

Corroborando a mensagem do NCTM, este estudo visa dar a oportunidade aos alunos de explorar problemas em contexto real, descrever resultados, utilizar modelos matemáticos e representações gráficas, numéricas e verbais.

II.2.2. Análise de Conceitos

É nesta secção que serão clarificados e explicitados alguns conceitos fundamentais à compreensão deste trabalho de investigação. Os conceitos relevantes, e já muitas vezes referidos anteriormente, passam pela Resolução de Problemas, Investigações Matemáticas, Modelo Matemático, Matematização, Modelação Matemática e Modelação Matemática em sala de aula.

II.2.2.1. Resolução de Problemas

Várias têm sido as designações a acompanhar o termo problema, por exemplo, segundo Blum e Niss (1991), um problema será entendido como uma situação que transporta consigo questões abertas que constituem um desafio intelectual para um indivíduo, na medida que ele nada dispõe, de imediato, de procedimentos ou algoritmos para obter diretamente as respostas a essas questões.

Lesh (1981) atribui aos problemas reais as seguintes características:

- Não surgem com questões facilmente identificáveis;
- O problema surge, normalmente, envolto num vasto leque de informações;
- É difícil, por vezes, distinguir a informação essencial da acessória, organizá-la e, com frequência, é necessário recolher informações não dispensáveis de imediato.

Podendo até esses problemas admitirem mais do que uma solução.
Por exemplo, imagine-se uma situação do dia a dia, com a qual o sujeito se depara e que precisa de resolver, utilizando conhecimentos matemáticos, mas para o qual não dispõe de um procedimento imediato que dite uma resposta. Neste sentido, usando a terminologia de Lesh (1981), pode dizer-se que se trata de um problema real.

II.2.2.2. Investigações Matemáticas

O processo de investigação matemática pode ser ilustrado pela chamada metáfora geográfica: "A ênfase está em explorar uma questão matemática em todas as direções. O objetivo é a viagem e não o destino" (Pirie, 1987, in Ernest, 1996, p. 30).
Para Ponte (2003), numa investigação matemática, parte-se de uma questão muito geral ou de um conjunto de informações pouco estruturadas a partir das quais se procuram formular questões mais precisas e sobre elas produzir diversas conjeturas. Ernest (1996) corrobora a opinião anterior, referindo que o conceito de investigação é problemático. As investigações são iniciadas por uma situação ou questão matemática e à medida que novas questões são colocadas e se avança na exploração da situação, o objeto da inquirição muda e é reformulado por quem a conduz.
No caso da resolução de problemas, o objetivo é encontrar um caminho para atingir uma meta não imediatamente acessível. Nesta perspetiva considera-se este processo convergente, ao contrário da investigação matemática que é considerada um processo divergente.
Assim, enquanto a resolução de problemas obriga os alunos a mobilizar conhecimentos para atingir um fim, as investigações matemáticas mobiliza-os para a exploração e a descoberta de vários caminhos.

II.2.2.3. Modelo Matemático

Um modelo matemático segundo Swetz (1992) é uma estrutura matemática que descreve, aproximadamente, as características de um fenómeno observado. Não muito longe desta opinião se encontram Edwards e Hamson (1990), que definem um modelo como uma forma simplificada de representar determinados aspetos de um sistema real. Em particular um modelo matemático é aquele em que se utilizam conceitos matemáticos para representar uma situação real.

Para Swetz e Hartzler (1991), um modelo matemático de um objeto ou de um fenómeno real consiste num conjunto de regras ou leis matemáticas que representam adequadamente esse objeto ou fenómeno, para um dado observador.

Uma perspetiva diferente daquelas que já foram referidas é dada por Blum e Niss (1989), que definem um modelo matemático por meio do terno ordenado (A,M,f), onde A consiste no segmento do mundo real a ser explorado, M é um conjunto de objetos, conceitos e relações matemáticas e f constitui uma correspondência que permite fazer a transferência de certos elementos de A para certos elementos de M. Atente-se aqui à intenção dos autores de salientar uma relação entre os aspetos matemáticos e os aspetos reais de uma dada situação, está implícita a ideia de que um modelo matemático surge associado a um fenómeno do mundo real.

Os modelos matemáticos que poderão surgir neste trabalho, em contexto curricular, estão ligados a temas do 11º ano de escolaridade:

- Geometria no Plano e no Espaço II
- Introdução ao Cálculo Diferencial I. Funções racionais e com radicais. Taxa de Variação e Derivada.

II.2.2.4. Matematização

Blum e Niss (1991) consideram a matematização como uma das etapas inerentes ao processo de modelação. Nesta perspetiva, chamar-se-á matematização à atividade que procura a transferência dos aspetos reais de um dado fenómeno para estruturas e conceitos matemáticos que os representam. Neste sentido, matematizar poderá corresponder ao ato de representar matematicamente determinados aspetos de uma situação do mundo real.

Niss (1992) encara o processo de matematização, como uma das etapas do processo de modelação matemática, referindo que se trata de um processo de tradução dos elementos, relações e hipóteses da situação extramatemática para um universo matemático, o que conduzirá a um modelo matemático.

Ponte (1992), tal como Niss, também distingue modelação de matematização e reserva também este último termo para a tradução duma situação em termos matemáticos.

A diferença entre modelação e matematização é também expressa, nas palavras de Blum e Niss (1991) do seguinte modo:

Enquanto a matematização é a tradução duma situação em termos matemáticos, usamos modelação ou construção do modelo para traduzir o processo que conduz uma situação problemática real até um modelo matemático.

II.2.2.5. Modelação Matemática

Swetz (1992) define a modelação matemática como o processo ativo de idealizar um modelo matemático.

Mogens Niss (1989) entende a modelação matemática como um processo que tem como ponto de partida uma situação problemática real e que culmina na construção de um modelo matemático dessa realidade. Trata-se de um processo dinâmico que, segundo ele, envolve as seguintes etapas:

I. Identificar os aspetos da realidade que interessam modelar;
II. Selecionar os objetos, relações e outros elementos relevantes a contemplar no modelo;
III. Adaptar os dados identificados anteriormente de modo a possibilitar a sua representação; matemática;
IV. Escolher um universo matemático adequado para estabelecer o modelo;
V. Traduzir os aspetos da realidade anteriormente selecionados em termos matemáticos;
VI. Estabelecer relações matemáticas entre os objetos que representam a situação real, explicitando os pressupostos assumidos e as propriedades encontradas;
VII. Usar métodos matemáticos para trabalhar os objetos e as relações estabelecidas de modo a obter resultados e conclusões;
VIII. Interpretar os resultados e conclusões à luz da realidade original;
IX. Avaliar o modelo criado, confrontando-o com outros modelos e com a teoria existente e verificar a sua adequação à realidade;

X. Modificar o modelo ou construir um novo modelo, se necessário, percorrendo de novo as etapas anteriores.

Num outro documento, Niss (1992) aponta como fases essenciais do processo de modelação:

I. Clarificar o objetivo de aplicar um modelo matemático ao contexto dado;
II. Especificar os aspetos a considerar, as questões a responder e as condições subjacentes à situação;
III. Matematizar a situação;
IV. Obter resultados a partir do modelo construído na fase anterior;
V. Interpretar os resultados à luz da situação proposta;
VI. Validar o modelo elaborado em (III).

Edwards e Hamson (1990), descrevem a modelação matemática como uma atividade cíclica que tem como objetivo a transposição de uma situação real para a matemática. O ciclo de modelação descrito por estes autores desenvolve-se de acordo com as etapas seguintes:

1. Identificação do problema real;

   Nesta fase é relevante colocar um conjunto de questões. Destacam-se, entre outras:
   - O que se pretende saber?
   - Qual é o objetivo a atingir?
   - Quais são as fontes de dados e os factos relevantes?
   - Existe alguma questão específica a resolver?
   - Será útil uma simulação do fenómeno?

2. Construção do modelo matemático;

   Os procedimentos seguintes revelam-se apropriados nesta fase:
   - Desenhar esquemas quando oportuno
   - Identificar e organizar as variáveis relevantes
   - Recolher dados e examiná-los para obter informações acerca do comportamento das variáveis
   - Denotar cada uma das variáveis por um símbolo
   - Especificar todos os pressupostos e hipóteses formuladas

- Estabelecer relações matemáticas e equações que combinem as variáveis do problema usando métodos matemáticos

3. Obtenção das soluções matemáticas a partir do modelo;

   São importantes nesta fase as seguintes estratégias:

   - Usar métodos algébricos ou numéricos e representações gráficas
   - Construir um programa de computador ou utilizar programas existentes para a obtenção de resultados
   - Usar um programa de simulação se necessário
   - Extrair informações sobre os valores das variáveis que interessam estudar a partir de tabelas ou de gráficos

4. Interpretação das soluções matemáticas;

   Esta fase diz respeito à análise dos resultados matemáticos obtidos, alguns aspetos devem ser observados:

   - Os valores obtidos para as variáveis são razoáveis no que se refere ao sinal e grandeza?
   - A forma de variação das variáveis estudadas está de acordo com o que seria de esperar?
   - Existem valores para os quais as variáveis apresentam um comportamento especial?
   - Como é afetada a solução se forem alteradas as condições iniciais?

5. Confrontação das soluções obtidas com a realidade;

   Algumas questões são fundamentais nesta fase:

   - Os resultados obtidos podem ser validados com base em dados reais?
   - As soluções matemáticas fazem sentido?
   - As previsões efetuadas confirmam-se ma realidade?
   - O modelo matemático obtido cumpre os objetivos desejados?
   - O modelo poderá ser significativamente melhorado mediante um tratamento matemático mais sofisticado? Se a resposta a esta pergunta for afirmativa, dever-se-á voltar à etapa 1 e reiniciar o ciclo. Se não for este o caso, será finalmente atingida a etapa 6.

Se houver necessidade de algum ajustamento, serão retomadas as etapas inicias. No caso de se concluir pela adequação do modelo à realidade em causa, será encetada um sexta etapa:

6. Elaboração de um relatório.
   Na elaboração do relatório deverá ter-se especial atenção ao grau de pormenor que é desejável e à sua organização, por forma a que fiquem claros os aspetos mais importantes do trabalho desenvolvido e sejam destacados os resultados encontrados.

São facilmente identificáveis pontos de convergência entre as propostas de Niss e de Edwards e Hamson. Há, no entanto, a salientar o facto de os últimos autores considerarem o ciclo de modelação concluído apenas após a elaboração de um relatório do trabalho desenvolvido.

II.2.2.6. Modelação Matemática em contexto de sala de aula

Abrantes (1992) levanta uma questão interessante: "será que a utilização da Matemática em situações da vida real não requer capacidades específicas que decorrem da natureza dessas situações e que não são geralmente mobilizadas em problemas puramente matemáticos?"(p.27). Os problemas que habitualmente são colocados não se encontram, em geral, bem formulados e existem dados em excesso e dados não explícitos. Estes fatores podem ser geradores de dificuldades e parecem tornar pertinente a necessidade de se procurar desenvolver nos alunos a capacidade de formular problemas e distinguir os dados essenciais daqueles que deverão ser ignorados.

Neste sentido, Kerr e Maki (1979) sugerem uma formulação para o processo de modelação matemática que confere especiais preocupações com o cenário pedagógico onde se desenvolve a construção e a exploração dos modelos. Para estes autores, a modelação matemática neste contexto requer a verificação de algumas etapas intermédias, que se destinam a tornar os modelos matemáticos apropriados para a sala de aula.

O processo de modelação é apresentado como um conjunto de etapas evolutivas, mas que apenas em situações ideais se sucedem numa determinada ordem, não devendo este processo assumir um percurso rígido:

Etapa 1 – Identificação de um problema do mundo real ou de uma área de estudo

Etapa 2 – Simplificação do problema com vista a sua tradução num enunciado suficientemente claro e sucinto. Esta descrição do problema, geralmente na forma de um enunciado escrito, constitui o chamado modelo real. Observe-se que nem todos os aspetos da situação real estão incorporados na descrição, uma vez que se trata de um modelo simplificado.

Etapa 3 – Construção de um modelo para a sala de aula

O modelo real sofre novas simplificações de modo a tornar-se suficientemente interessante e compreensível para os alunos e a permitir a aplicação de determinados aspetos matemáticos relevantes naquele contexto.

Etapa 4 – Construção do modelo matemático, através da conversão de certos aspetos do mundo real para símbolos e relações matemáticas.

Etapa 5 – Obtenção de conclusões, a partir do modelo encontrado, usando ferramentas e técnicas matemáticas.

Etapa 6 – Validação do modelo, por confronto das conclusões obtidas com a situação real.

A primeira etapa destina-se à identificação de um problema do mundo real ou de uma área de estudo. A segunda etapa está relacionada com a modificação e simplificação do modelo, de modo a ser descrito em termos razoavelmente precisos e sucintos. Na terceira etapa, o modelo real é mais simplificado e apresentado num contexto que seja interessante e compreensível para os alunos sendo possível a aplicação de certos aspetos matemáticos. Na quarta etapa, convertem-se os aspetos e conceitos do mundo real em símbolos e representações matemáticas, isto é, obtém-se o modelo matemático. Na penúltima etapa, são utilizadas ferramentas e técnicas matemáticas para se obter conclusões com base no modelo matemático obtido. Na última etapa, estas conclusões são testadas através da sua confrontação com o mundo real, validando-se assim o modelo. Se o modelo obtido mostrar insuficiências em relação às informações que fornece acerca da realidade, o processo deve ser retomado com a finalidade de melhorar o resultado final.

II.2.3. Aspetos inerentes ao contexto de resolução de problemas reais

A mensagem subjacente, que Carreira (1995) deixa passar quando refere que os processos de modelação matemática dos alunos são diferentes das abordagens realizadas pelos peritos, é o papel fundamental do contexto no processo de modelação matemática. Neste estudo deve ter-se em conta o facto de os problemas serem apresentados aos alunos com um aspeto escolar, em contexto de sala de aula, ou seja, os processos de modelação matemática desenvolvidos pelos alunos estão intimamente relacionados com o contexto no qual a modelação se desenvolve.

Segue-se um exemplo de um problema curioso, no sentido de se relacionar com uma das ideias expostas no início deste trabalho, quando é referido, por simples suposição, que muitos alunos têm o seu conhecimento distribuído por compartimentos não relacionados entre si.

E se uma mesma atividade fosse abordada de modos distintos segundo a disciplina na qual é proposta? A este propósito, Saljo e Wyndhamn (1993) apresentam os resultados de um estudo realizado na Suécia, durante o qual uma mesma tarefa é proposta aos alunos numa aula de Matemática e numa aula de Estudos Sociais.

O objetivo do estudo seria avaliar em que medida a atividade cognitiva dos alunos pode ser influenciada pelo contexto formal de uma determinada aula.

Tarefa proposta aos alunos: Determinar o montante a pagar pela expedição de uma carta com 120 g, utilizando para o efeito o quadro (abaixo representado) usado na estação de correios locais. Esta tarefa foi apresentada aos alunos pelas professoras de Matemática e de Estudos Sociais como qualquer tarefa normal das respetivas disciplinas para ser resolvida individualmente.

LETTERS

Domestic

Regular letters (and picture postcards)

Maximum weight grams	**Postage SEK**
20	2.10
100	4.00
250	7.50
500	11.50
1000	14.50

Quadro II.1.1: Quadro usado pela estação de correios local

(Saljo e Wyndhamn, 1993, p. 329)

Os resultados descritos pelos autores mostram que quando a atividade é apresentada numa aula de matemática, a maioria dos alunos tende a fazer um conjunto de cálculos para chegar a uma resposta, como por exemplo, saber o valor a pagar por grama e em seguida determinar o produto desse valor pelo peso da carta. Quando a atividade é apresentada numa aula de Estudos Sociais a abordagem mais frequente por parte dos alunos é a análise da tabela, de modo a determinar o valor da tarifa.

Pode então afirmar-se que a abordagem de um determinado problema pode ser condicionada pelo contexto em que é apresentada. Assim, determinar o valor a pagar pelo envio de uma carta pode ser uma tarefa significativamente diferente quando o sujeito se dirige a uma estação de correios, quando está numa aula de matemática ou quando está numa aula de Estudo Sociais.

Os resultados descritos permitem também concluir que, talvez os alunos construam categorias para os tipos de procedimentos a adotar numa aula de matemática (fazer cálculos) e noutras disciplinas. A este propósito, Lesh (1990) diz que muitos alunos tendem a suspender os seus conhecimentos sobre o mundo real quando resolvem problemas de Matemática.

II.2.4. O papel fundamental da modelação matemática e da resolução de problemas

As razões que têm levado à inclusão da modelação matemática nos currículos de diferentes países são diversas, destacando-se algumas preocupações comuns, entre as quais, o facto de, cada vez mais, a matemática ser uma disciplina para todos (Niss, 1992), pois as competências matemáticas têm vindo a assumir um papel cada vez mais relevante, quer na preparação dos jovens para a sua vida profissional, quer na sua preparação para a cidadania. Uma outra razão apresentada por Niss (1992) refere-se ao facto de o trabalho com aplicações e modelação na matemática escolar ser um veículo para se motivar os alunos e apoiar a aquisição e compreensão de conceitos, métodos e resultados matemáticos.

É frequente encontrar alunos francamente desmotivados nas aulas de matemática por não serem capazes de encontrar qualquer utilidade nos conteúdos que aí são tratados.

Para Niss (1992), trata-se de tornar a matemática visível, ou seja:

1) Demonstrar que a matemática desempenha de facto um papel essencial no mundo, incluindo a nossa sociedade, mostrando onde podemos encontrar matemática fora da própria disciplina.
2) Devemos demonstrar as (ou algumas das) razões porque é a matemática capaz de desempenhar este papel, isto é, mostrar de que modo o poder externo da matemática está relacionado com as suas propriedades internas. (p. 2)

Para tornar visível o significado da matemática é necessário recorrer a verdadeiras situações de modelação matemática, isto significa que uma grande parte das situações abordadas no contexto da aula de matemática devem ser questões de áreas distintas da matemática, com real interesse. Se todas as situações propostas aos alunos são irreais, aos poucos vai-se impondo a conclusão de que a matemática escolar é inútil. Não podemos, no entanto, cair no extremo oposto, procurando que todas as situações apresentadas decorram de situações reais.

Niss (1992) refere ainda que, do mesmo modo que um indivíduo não aprende a andar de bicicleta pelo simples facto de ler uma série de manuais sobre o assunto, um aluno não aprende a aplicar a matemática, quando sujeito apenas a brilhantes exposições do professor. Os alunos têm que ser envolvidos em trabalho de modelação matemática, de modo ativo e independente.

Também Silva (1992) afirma que "a teoria não existe por acaso, existe (…) enraizada na realidade do mundo que nos rodeia" (p. 4) e o aluno que não conseguir aperceber-se desse facto não fará mais do que "repetir mecanicamente a teoria, acabando por a esquecer facilmente" (p.4).

Na perspetiva de Swetz (1992), um dos objetivos fundamentais do ensino da matemática é a preparação dos jovens para uma abordagem segura dos problemas com que se deparam no dia a dia. O mesmo autor considera que "a modelação matemática é uma forma privilegiada de resolução de problemas do mundo real" (Swetz, 1992, p.47), pois regra geral leva o sujeito a clarificar as condições da situação, a olhar o problema de uma forma global. A construção de um modelo não fornece uma resposta para o problema, mas antes uma descrição do fenómeno, da qual poderão resultar soluções diversas. O processo de modelação e a compreensão do fenómeno a que o indivíduo é compelido assumem um caráter dinâmico e ativo. O uso de um modelo matemático ajuda a adquirir uma perceção do fenómeno real bastante mais profunda, isto é, depois de encontrado e explorado o modelo adequado a uma dada situação, o conhecimento dessa situação terá aumentado enormemente.

Ponte (1992) refere três formas sob as quais se pode estabelecer a ligação entre a Matemática e situações emergentes da realidade:

i. Olhando as situações reais como ponto de partida para a exploração de novos conceitos matemáticos. Quando as situações apresentadas vão de encontro aos verdadeiros interesses dos alunos, poderão desempenhar um importante papel motivador e constituírem a base ideal para o desenvolvimento das ideias matemáticas pretendidas.
ii. Apresentando as situações reais como exemplos de aplicação de determinados aspetos matemáticos. Este tipo de abordagem pode permitir aos alunos aprenderem a ver, numa série de situações concretas, certas estruturas matemáticas já estudadas. Para além disso, os alunos poderão atingir uma noção mais precisa das noções estudadas.
iii. Estudando um problema como uma situação de modelação. Neste caso o objetivo é levar os alunos a utilizar, se necessários, diversas ferramentas matemáticas e a percorrer todo o processo de modelação, nomeadamente a conceção, avaliação e análise crítica dos modelos.

Em suma, a Modelação Matemática escolar está longe de ser um processo repetitivo e mecânico que os alunos esquecem facilmente, é antes de mais um veículo para motivar os alunos, uma vez que lhes demonstra que a matemática desempenha um papel essencial no mundo e na nossa sociedade e mostra-lhes também o interesse de encontrar matemática fora da própria disciplina.
No contexto de sala de aula, deve recorrer-se a verdadeiras situações de Modelação Matemática, ou seja, a questões de áreas distintas da matemática e com real interesse para a maioria dos alunos. No que concerne à construção do modelo matemático, é importante referir que um modelo não fornece uma resposta para o problema, mas antes uma descrição do fenómeno, neste processo os alunos adquirem uma perceção do fenómeno real bastante mais profunda.

No contexto deste trabalho, segundo Abrantes (1995), existem alguns obstáculos a ter em conta:

- As condições institucionais - programas rígidos, horários e um sistema de avaliação desfavorável;
- Os professores - dificuldades em orientar e avaliar atividades mais abertas e exigentes e, por vezes, uma conceção de que as aplicações não são verdadeira matemática;
- Os alunos - um sentimento de maior segurança, em atividades rotineiras, do que em relação a atividades de aplicação.

Os obstáculos referidos por Abrantes combinam-se com os obstáculos dos autores Blum e Niss (1991):

1) Obstáculos do ponto de vista do ensino - Muitos professores têm receio de não terem tempo suficiente para lidarem com a resolução de problemas, modelação e aplicações acrescentados à Matemática obrigatória incluída nos currículos. Por outro lado, alguns professores duvidam que aplicações e conexões da Matemática com outras áreas possam pertencer ao ensino desta disciplina, uma vez que, segundo estes professores, tais componentes tendem a alterar a sua clareza, bem como a sua pureza estética;
2) Obstáculos do ponto de vista dos alunos - A resolução de problemas, modelação e aplicações da Matemática a outros assuntos tornam as aulas mais imprevisíveis para os alunos, do que as aulas tradicionais de Matemática;
3) Obstáculos do ponto de vista do professor - A resolução de problemas e a referência ao mundo fora da Matemática tornam o ensino mais aberto e mais exigente para os professores, porque são necessários conhecimentos adicionais, não matemáticos e dificulta o desenvolvimento de atividades para os alunos. Assim, muitos professores não se sentem capazes de lidar com exemplos de aplicações que não sejam retirados de assuntos que eles próprios tenham estudado. Muitas vezes os professores não conhecem, ou não têm tempo para fazer, o levantamento de exemplos de aplicações e modelação que possam adaptar às suas turmas.

II.2.5. Resultados de outros estudos

No âmbito das atividades de modelação matemática, foi desenvolvido um projeto, Projeto Modelação no Ensino da Matemática, por um grupo de professores (Matos e Carreira, 1995, in Maria, 2002) . Este projeto debruçou-se sobre a investigação dos processos utilizados pelos alunos em atividades de modelação e aplicações matemáticas, sobre a integração curricular dessas atividades e utilização do computador.

Carreira e Matos (1994, in Maria, 2002) disponibilizaram aos alunos, uma turma do 10º ano de escolaridade, um problema de modelação matemática apresentado por Swetz e Hartzler, em 1991.

Com base na observação e análise das atividades dos alunos estes autores tentaram identificar os modelos conceptuais que os alunos ativavam e operacionalizavam, no processo de modelação de uma situação real. Desta análise, as muitas transferências entre a matemática e a realidade desenvolvidas nos dois sentidos, foi identificado como um traço comum nos processos utilizados pelos alunos.

Interessa também referir que os processos utilizados na resolução de problemas estritamente matemáticos são distintos dos processos utilizados na resolução de problemas de modelação matemática, uma vez que nestes últimos existe um mediador dos processos de matematização formado pelas imagens, conhecimentos ou conceções da realidade que os alunos transportam para a atividade. Daqui resulta a conclusão de que as conexões entre os aspetos matemáticos e os aspetos ligados a situações reais são extremamente relevantes.

Estes autores consideram que a compreensão dos alunos acerca do problema se desenvolve à medida que estes vão construindo conexões entre alguns aspetos do contexto real e alguns elementos matemáticos, ou seja, à medida que estes vão criando ou recriando modelos conceptuais da situação.

Carreira (1993, in Maria, 2002), num estudo sobre a aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação, debruçou-se sobre o estudo dos processos cognitivos utilizados pelos alunos nestas atividades e destacou o seguinte:

> A compreensão das situações extramatemáticas descritas; a atribuição de significados concretos aos aspetos matemáticos envolvidos nas questões colocadas; a ativação de conhecimentos relevantes para a resolução de problemas específicos; a integração de novos conceitos de trigonometria; a elaboração de estratégias próprias para a obtenção de resultados, que ultrapassem os métodos habituais de abordagem de determinadas questões e a construção e manipulação de representações múltiplas na descrição e tratamento das situações apresentadas (pp. 335-336).

Carreira refere ainda que as estratégias de resolução evidenciadas pelos alunos mostram oscilações entre diversos sistemas de representação, sendo cada um deles mais eficaz para representar certos aspetos da situação e menos eficaz para representar outros. Esta autora refere que o facto do aluno iniciar uma estratégia de resolução com um determinado sistema de representação, não é impeditivo de que ele, em determinada altura, passe para outro sistema de representação, traduzindo as informações que já possuía.

Dos resultados do Projeto Modelação no Ensino da Matemática, referido anteriormente, emergiu um certo sentido de insatisfação, por parte dos investigadores participantes, em relação ao tipo de análise e explicação dos processos cognitivos desenvolvidos pelos alunos na resolução de problemas de aplicação (Matos e Carreira, 1995, in Maria, 2002).

No sentido de aprofundar o conhecimento daquilo que constitui a atividade cognitiva na Matemática escolar foi iniciado, em 1994, o Projeto Matemática - Realidade. Este trabalho de investigação tinha como objetivo principal compreender como o saber matemático dos alunos é estruturado e desenvolvido na relação com as atividades desenvolvidas em contexto de aula.

Parte das atividades envolviam: a resolução de problemas da realidade, a aplicação e a modelação matemática e a utilização de calculadoras e de computadores, na realização dessas atividades.

Uma das ideias resultantes do projeto, também já aqui referida, foi a de que os processos de modelação matemática dos alunos, em contexto de sala de aula, se afastam da abordagem dos peritos, ou seja, os processos de modelação que muitas vezes se pensam ser os mais apropriados na resolução de problemas reais em sala de aula, por vezes não o são.

Noutro estudo, mais recente realizado por Fernandes, em 1997 (in Maria, 2002), cujo objetivo era compreender os processos de aprendizagem do conceito de derivada, em alunos do 12º ano de escolaridade, utilizando uma experiência de ensino com ênfase na experimentação e na visualização gráfica, em contexto computacional e num ambiente de trabalho em grupo, verificou-se que os alunos utilizavam várias estratégias: geométricas, analíticas e mistas, consoante trabalhassem apenas num sistema de representação, o geométrico ou o analítico, ou estabelecessem conexões entre os dois sistemas de representação.

Segundo a autora, as primeiras estratégias estiveram relacionadas com a utilização de gráficos para resolver as questões e a apresentação de informação que os alunos tratavam utilizando uma terminologia imbuída de movimento. As segundas estratégias envolviam a utilização de factos, regras, fórmulas e teoremas usando uma terminologia estática, sem conexão com a representação gráfica. A terceira e última estratégia envolvia conexões entre a representação gráfica e a representação analítica, isto é, interligava as duas estratégias referidas anteriormente. A autora salientou ainda que a maioria dos alunos construiu os conceitos estabelecendo conexões adequadas entre as múltiplas representações.

De seguida são apresentados alguns exemplos que envolvem a resolução de problemas reais em contexto de sala de aula.

Vejamos o seguinte problema sugerido a alunos do ensino secundário e universitário relatado por Lester (1994):

> Um homem conduziu o seu automóvel da sua casa até à casa de um amigo à velocidade de 64 km/h e demorou 20 minutos. Quando regressou à sua casa percorreu as mesmas estradas mas agora à velocidade de 80 km/h. Quanto tempo demorou na viagem de regresso? (p. 15)

Muitos dos alunos não conseguiram resolver corretamente o problema, mas, talvez mais grave do que isso, foi o facto de grande parte deles ter respondido 25 minutos (64/20 = 80/x). Repare-se no facto de os alunos não se aperceberem da incoerência entre o resultado obtido e a situação descrita no enunciado. Torna-se óbvio que, se o homem conduziu a uma velocidade superior, não poderia demorar mais tempo do que na viagem anterior. Esta situação ilustra bem a falta de preocupação por parte dos alunos em verificar se as soluções fazem sentido na situação concreta que estão a explorar no momento.

Lester (1994), avança três razões principais para este estado de coisas:

1) A resolução de problemas é uma forma de atividade intelectual extremamente complexa
2) Há falta de acordo no que respeita a saber o que é que o processo de resolução de problemas envolve;
3) São dadas muito poucas oportunidades aos alunos para se envolverem realmente na resolução de problemas. (p 16.)

Partindo dos estudos de Schoenfeld (1985, 1987), Lester (1994) sintetiza assim as características que distinguem os bons do fracos resolvedores de problemas:

1) Os conhecimentos matemáticos dos bons resolvedores de problemas, além de serem mais, são diferentes dos conhecimentos dos fracos resolvedores de problemas. O conhecimento dos primeiros encontra-se bem estruturado e compõe-se de esquemas conceptuais ricos;
2) Os fracos resolvedores de problemas centram-se em aspetos superficiais dos problemas, os bons resolvedores focam a sua atenção em questões estruturais;
3) Os bons resolvedores de problemas controlam melhor todo o processo de resolução;
4) Os bons resolvedores tendem a procurar soluções mais elegantes, ao passo que os fracos resolvedores tendem a aceitar qualquer solução.

Lester (1994) apresenta algumas conclusões, resultantes dos seus estudos feitos ao longo das últimas décadas:

1) Para melhorar as suas capacidades de resolução, os alunos devem resolver muitos problemas;
2) A capacidade de resolver problemas desenvolve-se lentamente ao longo de um período alargado de tempo;
3) Para que os alunos beneficiem do ensino centrado na resolução de problemas, têm que acreditar que o seu professor pensa que a resolução de problemas é importante;
4) A maioria dos alunos beneficia significativamente de um ensino em resolução de problemas planeado de forma sistemática;
5) Ensinar os alunos acerca da resolução de problemas e fases de resolução de problemas contribui pouco para melhorar a sua capacidade geral para resolverem problemas.

Como conclusão, os processos de Modelação Matemática e Resolução de Problemas são atividades extremamente complexas e enriquecedoras na aprendizagem dos alunos, porém são poucas as oportunidades que são dadas aos mesmos para se envolverem realmente nestes processos.

É certo que a compreensão dos alunos, acerca deste tipo de problemas, se desenvolve à medida que estes vão construindo conexões entre alguns aspetos do contexto real e alguns elementos matemáticos, contudo existe uma grande falta de preocupação, por parte dos mesmos, em verificar se as soluções obtidas, na exploração destes problemas, fazem sentido em situações reais concretas.

É importante referir que, no que concerne às estratégias de resolução dos alunos, iniciar com um determinado sistema de representação não é impeditivo que, em determinada altura, o aluno não passe para outro sistema de representação traduzindo as informações que já possuía anteriormente.

Para terminar, nestas investigações ficou bem clara a ideia de que os processos de modelação matemática dos alunos, em contexto de sala de aula, se afastam da abordagem dos peritos, ou seja, os processos de modelação que muitas vezes parecem ser os mais apropriados por vezes não o são.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

II.3.1. Abordagem qualitativa

O objetivo essencial desta investigação consiste em conhecer e compreender, não só, de que forma a modelação matemática poderá ajudar os alunos na aprendizagem de um determinado conceito, mas também averiguar as principais dificuldades reveladas pelos mesmos durante a exploração e aplicação da modelação matemática num contexto de sala de aula.

Os dados desta investigação são obtidos essenciamente através da observação, de questionários e de documentos diversos. Pode então afirmar-se que, os dados desta natureza são ricos em informação descritiva sobre o objeto em estudo e são dados de difícil tratamento estatístico.

Assim tomar-se-à uma abordagem qualitativa e serão consideradas as seguintes características essenciais (Bogdan e Biklen, 1994):

(i) A fonte mais direta de dados é o ambiente natural e o investigador constitui uma peça fundamental na recolha desses dados. O contexto exerce influência sobre o fenómeno que se pretende estudar e, por conseguinte, devem ser estudados indissociadamente. Para estudar profundamente o fenómeno é importante conhecer todas as circunstâncias que o envolvem, por isso o investigador permanece por longos periodos no contexto onde se insere o objeto de estudo.

(ii) A investigação qualitativa tem um caráter descritivo. Todos os aspetos presentes na situação em estudo têm importância fundamental. Os dados recolhidos numa abordagem qualitativa são profundamente descritivos, traduzidos essencialmente por palavras ou imagens e não por números.

(iii) Numa investigação qualitativa é dada maior importância ao processo do que ao produto. Para o investigador, estudar um problema significa, em grande parte, compreender como é que ele está presente naquele contexto escolhido.

(iv) O investigador qualitativo tende a analisar os dados de forma indutiva. A confirmação ou refutação de hipóteses não é o objetivo do investigador que adota uma metodologia qualitativa, mas antes uma descoberta sobre o contexto em estudo.

(v) Na abordagem qualitativa, o significado de qualquer acontecimento ou atitude reveste--se de vital importância. É fundamental para o investigador aproximar-se do significado que os sujeitos dão aos diversos fenómenos.

Bodgan e Bilken (1994) referem ainda que o objetivo principal do investigador é o de construir conhecimento e não o de dar opiniões sobre determinado contexto.

Yin (1989) considera que o estudo de caso é uma estratégia particularmente apropriada quando se pretende responder a questões do como e do porquê, quando o investigador tem pouco controlo sobre os acontecimentos e quando o estudo se centra no fenómeno que decorre num contexto real.

O estudo de caso não tem características experimentais e favorece a compreensão de um fenómeno, sendo insubstituível quando não é possível desenvolver experimentação, por motivos éticos ou outros. Um caso pode ser uma pessoa, um grupo, uma família, uma comunidade.

No presente estudo será desenvolvido apenas um estudo de caso, sendo a unidade de análise um grupo de alunos.

Apesar do rigor utilizado na análise e procedimentos deste estudo, o tipo de abordagem feita na recolha de dados caracteriza-se por estar limitada à situação estudada, não sendo assim possível uma generalização plena dos seus resultados e conclusões. Portanto, é relevante sublinhar que este trabalho incidiu numa situação única, desenvolvida por professores e alunos com características muito próprias, não se podendo assim concluir que este estudo possa produzir os mesmos resultados quando aplicado a locais e sujeitos diferentes. Assim, cada leitor ao tomar contacto com este estudo pode ou não encontrar pontos comuns com a sua própria experiência.

Apesar do facto da utilização desta metodologia vir limitar a sua generalização, não significa que esta abordagem seja menos útil que uma abordagem quantitativa. Por exemplo, a falta de exploração de um certo tema na literatura disponível, o caráter descritivo da pesquisa ou a compreensão de um fenómeno complexo na sua totalidade são elementos que tornam propícia uma análise qualitativa e não uma análise quantitativa. Contudo, diferentes maneiras de lidar com o mundo geram formas distintas de perceber e interpretar os significados de um determinado objeto em estudo, que não se opõem nem se contradizem.

II.3.2. Contexto do estudo

Este estudo desenvolveu-se na sala de aula, com uma turma de 11º ano de escolaridade, da Escola Secundária Jorge Peixinho, no Montijo, na disciplina de Matemática A no decorrer do segundo período letivo.

Foram lecionadas três aulas no sentido da exploração e da aplicação da modelação matemática em três temas distintos, todas as sessões tiveram o mesmo ponto de partida, ou seja, iniciaram-se com a apresentação de uma situação real.

A primeira aula de investigação e recolha de dados decorreu na presença da investigadora, da professora responsável pela disciplina e de mais dois professores estagiários. O tema subjacente a esta primeira aula foi a modelação de uma situação em contexto real utilizando funções racionais.

A segunda aula decorreu apenas na presença da investigadora, sendo o tema principal ligado à modelação matemática e às funções trigonométricas. A terceira e última aula decorreu novamente na presença da investigadora, da professora responsável pela disciplina e pelos dois estagiários, o tema foi a modelação de uma situação em contexto real utilizando funções com radicais.

Observe-se que a última sessão foi uma aula de introdução ao tema acima referido, os alunos tiveram um primeiro contacto com os conteúdos através da modelação matemática, descobrindo e explorando. As restantes sessões foram de aplicação de um conteúdo já aprendido, sempre num contexto de modelação matemática. É de salientar também que a segunda sessão decorreu em horário extra letivo.

II.3.3. Recolha de dados

A realização de tarefas de modelação matemática proporcionou, à investigadora, a grande oportunidade de observar a atividade dos alunos quando confrontados com situações imprevisíveis ligadas à realidade.

II.3.3.1. Observação

A investigadora foi observadora participante, intervindo sempre que solicitada pelos alunos, mas tendo sempre presente que o pretendido era que cada aluno encontrasse o seu próprio caminho para resolver o problema proposto. Neste sentido, quando um aluno parecia bloqueado ou perdido, a investigadora não respondia diretamente às suas dúvidas, procurava levantar algumas questões pertinentes para redirecionar o aluno.

Os registos da observação foram feitos por escrito pela investigadora/observadora, que nunca perdeu de vista a inevitável interação entre ela e o objeto de estudo, sabendo à partida que estes se influenciam mutuamente e estão inseparavelmente relacionados. Assim, na observação e interpretação dos dados, a investigadora tentou minimizar a eventual subjetividade decorrente da sua personalidade, dos seus valores e dos seus sentimentos.

Para otimizar, no sentido de minimizar, as interferências destes fatores intrínsecos à investigadora, no final de cada sessão, a observadora trocou algumas impressões com os outros professores, nomeadamente com a professora responsável pela disciplina e com os estagiários.

A investigadora empenhou-se na obtenção de um diário de campo tão completo quanto possível, procurando anotar as declarações dos alunos no decurso dos seus diálogos. Tentou também ter uma postura que permitisse um desenvolvimento das atividades o mais próximo possível do habitual, um exemplo disso foi não estar demasiado próxima dos alunos e dar-lhes o devido espaço para que estes não se inibissem de explorar e fazer observações sobre as tarefas propostas.

É importante salientar que o papel da investigadora não consiste em modificar os pontos de vista dos alunos, mas sim em tentar compreendê-los.

II.3.3.2. Inquéritos

Como complemento da observação e dos registos feitos nas aulas, no início da segunda sessão e no final da terceira, a investigadora colocou aos alunos três questões de resposta aberta sobre modelação matemática:

- O que é um modelo matemático?
- O que é a modelação matemática?
- Segundo o seu ponto de vista, diga qual a utilidade da modelação matemática?

Estas questões, não confidenciais, foram respondidas numa folha a entregar no final da aula, e serviram para recolher dados na escrita dos alunos e conhecer melhor alguns pontos de vista dos mesmos sobre a Modelação Matemática e a sua utilidade.

É relevante referir ainda que estas questões surgiram da curiosidade de averiguar uma possível evolução dos conceitos e ideias dos discentes sobre o processo de Modelação Matemática ao longo das sessões.

No final da terceira sessão foi entregue um questionário confidencial com perguntas de resposta aberta e perguntas de resposta fechada, abordando o seguinte conjunto de parâmetros:

- Dificuldade na resolução
- Necessidade de mais tempo para resolver
- Originalidade/Novidade
- Facilidade de interpretação
- Vantagem em usar as novas tecnologias
- Utilização de conceitos matemáticos
- Ligação com a realidade
- Interesse/prazer na resolução

A escolha dos parâmetros supracitados tem como objetivo, verificar qual a apreciação e opinião dos alunos acerca das aulas que envolveram a realização de tarefas de modelação matemática, bem como verificar as dificuldades que sentiram durante todo este processo .
Os inquéritos encontram-se em anexos, Anexo I.

II.3.4. Caracterização das tarefas desenvolvidas

Os temas de cada tarefa foram escolhidos tendo em conta o interesse por relacionar a matemática com as outras disciplinas, tais como biologia, geografia, economia, física, entre outras. No final da caracterização das tarefas será feita uma contextualização das mesmas, com o objetivo de se entender melhor todo o processo de Modelação Matemática inerente a cada uma delas.
Atente o leitor que os enunciados das Tarefas 1, 2 e 3 encontram-se em anexos, Anexo II, Anexo III e Anexo V, respetivamente.

Tarefa 1 – Corvos e Búzios

A aula inicia com um vídeo que reporta ao conteúdo do enunciado da tarefa. Depois da visualização do vídeo[1], é feita a leitura da seguinte introdução:

As gaivotas e os corvos alimentam-se de vários tipos de moluscos erguendo-os no ar e deixando-os cair contra as rochas para abrir as conchas. Os corvos parecem ser seletivos e apanham apenas búzios grandes, mas por outro lado são persistentes, uma vez que um único corvo pode ser observado a deixar cair um búzio cerca de 20 vezes. Os cientistas sugeriram que este comportamento é um exemplo de uma tomada de decisão no sentido de otimizar a luta pela sobrevivência.

O principal propósito desta primeira tarefa é espicaçar a curiosidade dos alunos, no sentido de lhes mostrar uma situação real, interessante e noutra área distinta da matemática, e sobretudo aproveitar esse interesse e entusiasmo para estabelecer relações entre essa área e a matemática. O tema da tarefa está relacionado com a Biologia e parece ter sido uma boa escolha, uma vez que é notório o interesse e a sensibilida dos alunos a este tema real.

A riqueza da ligação do real com a matemática, neste caso particular entre o real e as funções racionais, poderão ser uma fonte de motivação para as tarefas seguintes.

Tema da Tarefa 2 – Nascimento e Ocaso do Sol

Na Tarefa 2 foi dada aos alunos uma tabela, do Observatório Astronómico de Lisboa, onde são indicados os dados reais do Nascimento e do Ocaso do Sol em Lisboa no ano de 2011. Portanto o tema subjacente a esta tarefa é a astronomia. A introdução é a seguinte:

Sempre ouvimos dizer, aqui no hemisfério norte, que o dia mais longo do ano é no dia 21 de junho, dia que marca o início do verão, e o dia mais mais curto é no dia 21 de dezembro, dia que marca o início do inverno. É curioso verificar que para quem se encontra no hemisfério sul, 21 de junho marca o dia mais curto e 21 de dezembro o dia mais longo. Na linha do equador (latitude zero) os dias parecem ter todos as mesma duração.

Em dezembro, podíamos ver o sol a desaparecer pouco depois das 17h e hoje o ocaso acontece perto das 18h.

---

[1] O vídeo encontra-se em suporte digital, no CD Relatório de Estágio.

À semelhaça do vídeo da tarefa anterior, a informação desta tabela também surtiu algum interesse nos alunos, despertando até alguma curiosidade, no sentido de a grande maioria, mesmo antes de ler o enunciado, identificar um possível problema a investigar.
O tempo ideal para a resolução de uma tarefa de modelação matemática devia estar longe de ser apenas 90 minutos, contudo, apesar deste obstáculo, os principais objetivos desta tarefa passaram por averiguar se os alunos mobilizaram os seus conhecimentos para a construção do modelo matemático e, dado que se trata da segunda tarefa, averiguar se os alunos se tornam mais críticos em relação à passagem da liguagem real para a linguagem matemática.

Tema da Tarefa 3 – Linha do horizonte

A Tarefa 3 surge como introdução a uma nova matéria para os alunos, as funções irracionais. A Modelação Matemática aparece no seguinte contexto:
Imagine alguém que observe a linha do horizonte. Parece claro que a distância que a vista consegue alcançar depende da altitude do ponto de observação.
O objetivo nuclear desta proposta foi, mais uma vez, averiguar se os alunos mobilizam os seus conhecimentos para a construção de um modelo matemático, utilizando para isso saberes adquiridos em anos anteriores. Também é uma prioridade averiguar se a Modelação Matemática auxiliou os alunos no entendimento e compreensão das funções irracionais.
Depois da caracterização das três tarefas, torna-se importante contextualizá-las no processo de modelação matemática. Os pontos que se seguem determinam os passos seguidos pelos alunos transversais às Tarefas 1, 2 e 3:

- É colocado um problema real concreto e é requerida, através de experimentações, a construção de um modelo matemático da situação.
- É necessário identificar variáveis e estabelecer relações entre elas.
- É proposta a construção de gráficos, com recurso à calculadora gráfica, e a sua interpretação.
- É necessário usar o modelo matemático para obter soluções.
- É necessário validar o modelo confrontando-o com os dados reais.

Para a resolução das atividades propostas os alunos não foram distribuídos por grupos, permaneceram nos seus lugares habituais e, ao longo das aulas, foram trocando opiniões entre si, partilhando ideias e dúvidas com os colegas mais próximos.

Inicialmente a investigadora pretendia observar a turma no geral, daí não ter disposto os alunos por grupo, e porquê? Porque para ela, isso seria interferir na disposição habitual da turma e consequentemente provocar algumas distabilizações a nível comportamental. Contudo, facilmente verificou que não seria fácil observar tantos alunos ao mesmo tempo e apesar de decidir continuar com os lugares habituais dos alunos, escolheu três deles para observar mais atentamente, nunca perdendo a atenção global da turma.

Os três alunos foram escolhidos tendo em conta as suas diferentes características, posturas e atitudes nas aulas de matemática, referidas adiante.

II.3.5. Retrato da turma

A Escola Secundária Jorge Peixinho encontra-se inserida num meio social de classe média e média alta, predominando as famílias com formação média ou superior.

A maioria dos alunos residia na cidade do Montijo e pertencia à área vocacional de Ciências e Tecnologias. Inicialmente contava com 24 alunos inscritos na disciplina de Matemática A, porém no final do primeiro período duas alunas foram transferidas. Dos restantes 22 alunos, 10 eram do sexo masculino e 12 do sexo feminino, sendo a média de idades de 16 anos.

No que diz respeito ao aproveitamento dos alunos à disciplina de Matemática, no primeiro período, 59% dos alunos apresentavam um nível de aproveitamento positivo, refletindo-se em 13 alunos com classificação positiva. No final do segundo período a percentagem de alunos com este aproveitamento diminuiu para 54,5%, o que se refletiu em 12 alunos com classificação positiva. Contudo, existiu um aumento de 10 para 10,5 valores no que concerne à média das classificações do primeiro para o segundo período.

Relativamente à participação dos alunos no trabalho desenvolvido nas aulas de matemática, apesar do seu comportamento ser globalmente adequado e estes se mostrarem sempre simpáticos e cordiais, é de salientar que os resultados de avaliação escrita refletem pouca partipação nas aulas, falta de concentração e interesse. A fraca participação dos alunos não proporciona ao professor a comunição desejada entre professor-aluno, no sentido de que é mais complicado entender quais as suas dúvidas e nível de compreensão das matérias.

É de extrema importância referir que a maioria dos alunos tem muitas capacidades, todavia o potencial dos mesmos não é canalizado para as aulas de matemática e infelizmente, a inércia e a falta de interesse dos discentes consegue vencer as suas capacidades.

De uma forma geral, revelavam pouco espírito crítico, pouca curiosidade pela disciplina de matemática, falta de motivação por tudo o que se passava à sua volta, não aderindo com muito entusiasmo a atividades extracurriculares organizadas pela escola.

Finalmente, deve sublinhar-se a grande ligação entre estes estudantes e o desporto, nomeadamente pelo basquetebol.

II.3.6. Caracterização dos três alunos mais observados

Os nomes utilizados, ao longo deste relatório, salvaguardam a privacidade dos alunos da turma do 11º ano de escolaridade, ou seja, a investigadora descreve situações reais utilizando nomes fictícios. Como já foi referido, os alunos foram escolhidos tendo em conta a suas diferentes características, posturas e atitudes nas aulas de matemática. Assim, os alunos escolhidos foram, a Maria, a melhor aluna da turma, O Gabriel, com um bom raciocínio mas com classificações medianas e o Guilherme, com um excelente espírito crítico mas com classificações negativas.

A Maria é boa aluna, geralmente interessada e motivada, participa nas aulas e esforça-se por aprender o que lhe é ensinado, prova disso são os seus bons resultados à disciplina de matemática. Esta aluna foi escolhida por ser a melhor da turma ou pelo menos é aquela que tira uma melhor classificação em comparação com os restantes alunos.

O Guilherme é um aluno completamente desinteressado pelas aulas de matemática, não se esforça rigorosamente nada por aprender seja aquilo que for, aliás, perde metade do tempo a olhar para o relógio na ânsia da hora de saída, a sua classificação no final do primeiro período foi de sete valores. Contudo, é um aluno com bastantes capacidades e com um excelente espírito crítico, não é conflituoso e irrequieto, não prejudica os seus colegas e mantém-se em silêncio até ao final da aula.

O Gabriel era aluno da professora, orientadora de estágio, no ano anterior e começou o presente ano letivo com uma classificação bastante aceitável. É um aluno com muita capacidade, excelente raciocínio e um bom sentido crítico, mas pouco participativo nas aulas. Apesar de ser um aluno interessado e com classificações positivas, o Gabriel tem vindo a descer as suas classificações à disciplina de matemática.

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

II.4.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados os dados empíricos do estudo levado a cabo, é descrito o desempenho dos alunos durante a realização das três tarefas de modelação matemática, com uma centralização nas principais dificuldades dos alunos e na mobilização dos seus conhecimentos.
Procurou-se identificar, em cada uma das tarefas, fases essenciais percorridas pelos alunos e analisar pormenorizadamente o desempenho dos mesmos em cada uma dessas fases.
Durante a análise dos dados tentou-se estabelecer uma ligação entre o que era descrito na atividade dos alunos e os aspetos teóricos apresentados na Revisão da Literatura, assim como as questões enunciadas inicialmente.
Sentiu-se também a necessidade de apresentar frequentemente excertos de conversas dos alunos e trechos das suas respostas aos questionários.
A última fase consistiu em procurar estabelecer eventuais relações entre conceções evidenciadas pelos alunos e o seu desempenho durante as atividades.

II.4.2. Desempenho dos alunos durante a realização das tarefas

O processo de modelação matemática, adotado nas aulas, foi apresentado como um conjunto de quatro etapas distintas:

1) Escolha do modelo - Formular um modelo matemático e escolher as variáveis.
Na construção do modelo matemático, os alunos estão a converter certos aspetos do mundo real para símbolos e relações matemáticas;

2) Análise e resolução do problema a partir do modelo encontrado, usando ferramentas e técnicas matemáticas;

3) Interpretação do problema em contexto matemático;

4) Validação do modelo – Confrontar a solução com a realidade e se não se ajustar, aperfeiçoar o modelo.

Para o leitor mais atento, salta à vista a ausência de algumas etapas no processo de modelação matemática em contexto de sala de aula, uma vez que não foram os alunos a identificar um problema real e a simplificá-lo de forma clara e sucinta para posterior resolução. Infelizmente o obstáculo da falta de tempo para cumprir o programa, não permitiu integrar estas etapas nas aulas de matemática e assim o processo inicia já com um problema real simplificado.
Falta referir que todas as tarefas se desenvolveram com a possibilidade de recurso à calculadora gráfica, nomeadamente à TI-84.

II.4.2.1. Tarefa 1

A aula teve início com a questão: "O que é a modelação matemática?".
Nenhum dos alunos soube responder à questão, ouviu-se um comentário ou outro: "Modelação vem de modelar, talvez seja modelar a matemática a qualquer coisa", contudo, a maioria respondeu que não sabia e que nunca tinha ouvido falar. A resposta à questão continuou em aberto e passou-se à fase seguinte, a visualização de um pequeno vídeo que serviu para chamar a atenção dos alunos para a tarefa que iriam realizar.
O vídeo entusiasmou a maioria dos alunos, todos acharam interessante ver os corvos a partirem búzios deixando-os cair de uma determinada altura e foi com grande alegria que se verificou uma leitura curiosa do enunciado da tarefa. Contudo, os problemas começaram logo na primeira questão: "Pôr os dados na máquina é fácil, mas agora o que é isto de encontrar o modelo?", "O que é um modelo?"

A maioria dos alunos teve muita facilidade em inserir os dados na máquina, não houve perguntas de como e onde inserir os dados. Bastava inserir na Lista L1 os dados relativos à altura da queda dos búzios e na lista L2 os dados relativos ao respetivo número de quedas dos búzios.
A Maria e o Gabriel, depois de inserirem os dados na calculadora gráfica, encontravam-se muito concentrados a olhar para o enunciado, o Hugo desistiu assim que verificou que não sabia o que fazer com aquela nuvem de pontos e muito menos o que era um modelo que se ajustasse aos dados. O Guilherme, ao contrário do que era esperado, encontrava-se com algum entusiasmo a olhar para a calculadora gráfica.
Nesta fase, nenhum aluno conseguiu avançar, a investigadora teve que intervir questionando-os de forma a conseguir encaminhá-los, sem contudo dar-lhes a resposta.

Foi desenhada, propositadamente, no quadro uma nuvem de pontos. Era óbvio que o modelo que se ajustava na perfeição aos dados era uma função definida por um polinómio de segundo grau.
Depois os alunos foram questionados da seguinte forma pela investigadora: "Qual o modelo que se ajusta aos dados que se encontram no quadro?" Ouviu-se dizer:

> **Aluno**: "Isso é uma parábola!".
> **Investigadora**: "São os pontos que são uma parábola?"
> **Outro aluno**: "Não! A linha que os une é que é uma parábola!".
> **Investigadora**: "Existe alguma forma analítica de encontrar essa linha?"

Intuitivamente os alunos entenderam o que era um modelo matemático, uma vez que comentários como aquele que se segue começaram a surgir: "Não estou a ver nenhuma função conhecida que se ajuste a isto!".
Os alunos estavam prestes a iniciar a primeira etapa do processo, encontrar um modelo matemático que se ajustasse aos dados, convertendo intuitivamente aspetos reais para símbolos e relações matemáticas.
Não foi uma tarefa fácil encontrar um modelo, talvez tenha sido o passo mais complicado de todo o processo. Apenas a Maria, a Beatriz e o Gabriel conseguiram identificar, naquela nuvem de pontos, uma função racional e ainda assim, não foi fácil mobilizar conhecimentos para tentar encontrar uma expressão analítica adequada.
Nenhum dos alunos presentes conseguiu aplicar a matéria dada nas aulas imediatamente anteriores, ou seja, partindo de uma função racional inicial, efetuar as devidas transformações, até chegar a um modelo que lhes parecesse adequado. Esta evidência levou a investigadora a concluir que, para os alunos, estas transformações nada se relacionavam com o problema, para eles são coisas diferentes e compartimentadas em lugares distintos.
Mais uma vez a investigadora teve que intervir no sentido de lhes mostrar que era possível resolver aquele problema utilizando as ferramentas matemáticas adequadas, afirmando que num passado muito recente todos os alunos resolveram exercícios do manual sobre transformações em funções racionais.
Acerca da escolha das variáveis, a grande maioria não se questionou e assumiu simplesmente que o eixo das abcissas seria representado pela primeira variável que aparecia na tabela e consequentemente o eixo das ordenadas seria representado pela variável seguinte, ou seja,

consideraram o eixo das abcissas o representante da altura da queda dos búzios e o eixo das ordenadas o representante do nº médio de quedas dos búzios.

Por tentativa e erro, todos os alunos chegaram a um modelo matemático. Facilmente foi verificado que existiam vários modelos e consequentemente os resultados obtidos não seriam exatamente iguais.

Os alunos entraram nas restantes etapas do processo de modelação matemática sem dificuldade, depois de encontrado o modelo, todas as questões foram respondidas sem grandes dúvidas. Os alunos não tiveram dificuldade em analisar, interpretar e encontrar respostas às questões que lhes foram propostas.

A validação do modelo surgiu quando a professora pediu aos alunos que investigassem se os dados reais do enunciado coincidiam com os valores calculados a partir do modelo encontrado. Rapidamente se concluiu que existiam modelos mais rigorosos do que outros, portanto os alunos que não tiveram as melhores aproximações tinham sempre a hipótese de aperfeiçoar o seu modelo.

A última questão da tarefa 1 prentendia que os alunos relacionassem todas as informações e resultados obtidos com o problema real em questão. Verifiquem-se algumas das suas respostas:

3.3 Tendo em conta todas as informações que reuniu, comente a seguinte frase: Os cientistas sugeriram que o comportamento dos corvos é um exemplo de tomada de decisão no sentido de otimizar a luta pela sobrevivência. Concordo pois eles são seletivos e escolhem os maiores buzios o que lhes beneficia o trabalho na luta pelo alimento

otimizar a luta pela sobrevivência. Os corvos se subirem muito alto é maior a queda e é mais provável que o búzio se parta.

De acordo com o estudo podemos concluir que os corvos minimizam o seu trabalho à medida que aumentam a altura do seu voo pois diminuem o numero de quedas.

Os corvos usam os grandes porque estes dão menos trabalho e fornecem mais energia.

Respostas da Maria, Guilherme e Gabriel, respetivamente:

otimizar a luta pela sobrevivência. A afirmação parece-me verdadeira pois só sobrevivem aqueles conseguem minimizar o seu trabalho e obter o alimento que necessitam.

otimizar a luta pela sobrevivência. Porque ao escolher os búzios grandes, têm menos trabalho ao partir as conchas. Não precisam de subir tanto e o nº de quedas não tem que ser muito elevado. Gastam menos energia e consomem - kalorias o que ajuda na sua sobrevivência

otimizar a luta pela sobrevivência. Ao verificarem maior facilidade em partir os maiores búzios houve uma tomada de decisão por parte dos corvos tal que a maioria escolhe os maiores corvos e a melhor altura para partir as conchas mais facilmente.

Nas respostas a esta questão torna-se visível que existem algumas dificuldades na passagem da linguagem matemática para a linguagem real. Apenas metade dos alunos da turma conseguiu fazer esta passagem com sucesso, relacionando corretamente algumas das informações disponíveis com o problema real, mas os restantes alunos continuaram presos ao seu senso comum, não mobilizando o que estava presente no modelo. Por exemplo, a maioria dos alunos alega que o trabalho do corvo deve ser mínimo, mas é evidente que alguns deles utilizam a palavra trabalho ligada apenas ao seu senso comum e não às informações por eles obtidas. Veja-se o caso do Guilherme, que refere "têm menos trabalho a partir as conchas" sem relacionar isso com o trabalho (W) da Física, abordado na tarefa.

O Gabriel por seu lado referiu-se, muito corretamente, a uma altura ideal para deixar cair as conchas, esta conclusão real está implicitamente relacionada com a resposta à questão 3.2, que averigua quais os valores da altura para os quais o trabalho do corvo é mínimo.

Síntese

Os alunos tiveram o seu primeiro contacto com a Modelação Matemática na tarefa 1, portanto já seria de esperar que tivessem algumas dificuldades na sua resolução.

Relativamente aos saberes e conhecimentos dos alunos:

- Bom conhecimento matemático das matérias dadas anteriormente, (atente o leitor que as dificuldades dos alunos se manifestaram na mobilização desse conhecimento, o que não implica que os mesmos não sejam portadores desses saberes).

- Boa capacidade de resolução e interpretação dos exercícios (depois da transformação do problema real para um problema matemático).

Numa primeira abordagem as grandes dificuldades foram sentidas, tanto na passagem da linguagem matemática para a real, como na passagem da liguagem real para a matemática, dando um maior ênfase a esta última. Assim, algumas das dificuldades que valem a pena referir são:

- Estabelecer relações entre o mundo real e o mundo matemático para definição do problema.
- Mobilizar os conhecimentos para a construção do modelo matemático.
- Construir o modelo matemático.
- A falta de sentido crítico em relação ao enunciado e à passagem da linguagem real para a linguagem matemática.
- Entrar em linha de conta com vários dados em simultâneo e estabelecer uma relação entre a informação obtida e o problema real.

Em suma, parece que para a maioria dos alunos o mundo real não se relaciona com o mundo matemático, ou melhor, relaciona-se desde que, à partida, não sejam eles a estabelecer essa relação. A partir do momento em que o problema matemático está definido, os alunos têm uma boa capacidade de resolução e interpretação dos exercícios e têm as ferramentas matemáticas adequadas à resolução correta de um problema rotineiro. Contudo, não conseguiram mobilizar os seus conhecimentos sempre que confrontados com situações inesperadas, novas e que exijam sentido crítico e de aplicação dessas ferramentas. Por exemplo, os alunos sabem o que é uma função racional e sabem aplicá-la a problemas dados à partida, contudo foi com dificuldade que relacionaram a nuvem de pontos com uma função racional e mesmo depois de concluirem que se poderia tratar efetivamente de uma função desse tipo, foi ainda com alguma dificuldade que mobilizaram os saberes aprendidos nas aulas imediatamente anteriores.

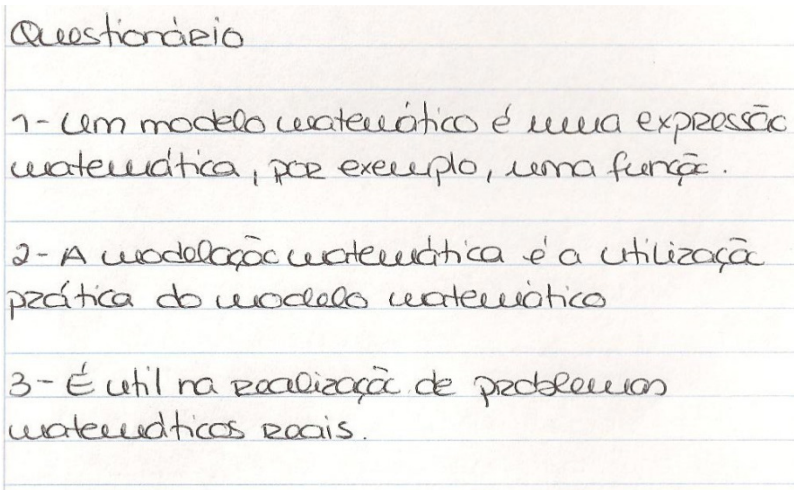
Resumindo, nesta primeira experiência é evidente que os alunos não sabiam quais os passos a seguir e como aplicar os seus conhecimentos no processo de modelação matemática, porém depois de identificado o problema e encontrado o modelo, conseguiram estabelecer relações entre o real e a matemática. Assim, talvez fosse de esperar que os alunos se encontrassem bastante presos ao seu senso comum na construção do modelo matemático e quando têm que concluir sobre os resultados obtidos na resolução da tarefa.

II.4.2.2. Conceções dos alunos sobre a Modelação Matemática – Parte I

Antes de ser distribuída a tarefa 2 os alunos responderam a um breve questionário:

- O que é um modelo matemático?
- O que é a modelação matemática?
- Segundo o seu ponto de vista, diga qual a utilidade da modelação matemática?

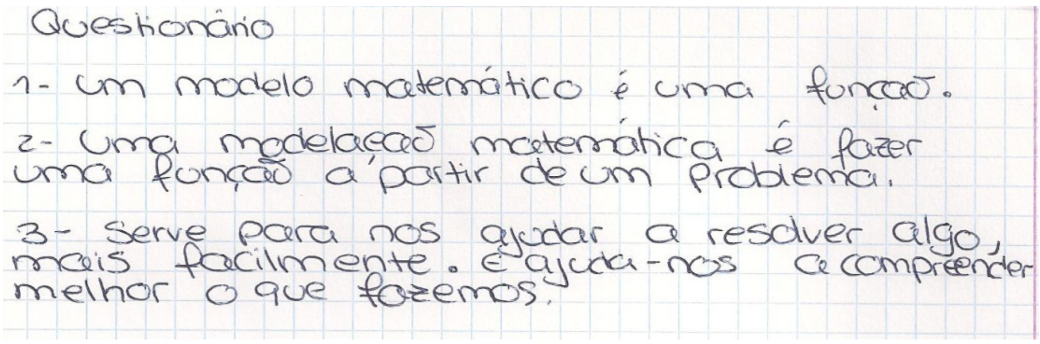
De seguida encontram-se excertos de algumas respostas dadas pelos alunos:


Questionário

1- Um modelo matemático é uma expressão matemática, por exemplo, uma função.

2- A modelação matemática é a utilização prática do modelo matemático

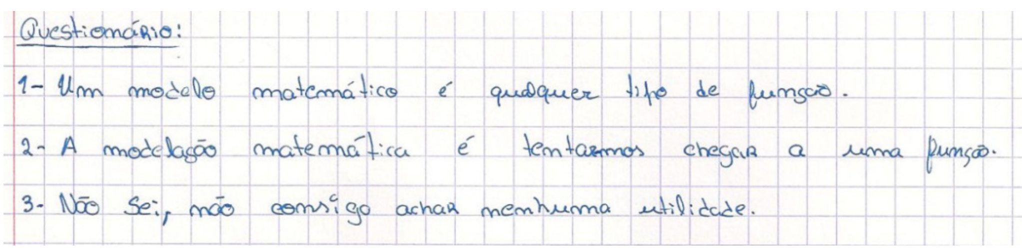
3- É útil na realização de problemas matemáticos reais.


Questionário

1- Um modelo matemático é uma função.

2- Uma modelação matemática é fazer uma função a partir de um problema.

3- Serve para nos ajudar a resolver algo, mais facilmente. E ajuda-nos a compreender melhor o que fazemos.


Questionário:

1- Um modelo matemático é qualquer tipo de função.

2- A modelação matemática é tentarmos chegar a uma função.

3- Não sei, não consigo achar nenhuma utilidade.

1- Um modelo matematico é uma função racional a qual podemos chegar a partir de translações de outra funções racionais.

2- A modelação matemática é um conjunto de translações que a função sofre com vista a chegar a um certo grafico.

3- Para mim a modelação matematica é muito util para conseguir desenhar um grafico de uma função racional sem se recorrer a uma maquina grafica.

Respostas da Maria, do Guilherme e do Gabriel, respetivamente:

Questionário

1- O que é um modelo matemático?

Um modelo matemático é uma expressão conhecida (matemática), passível de ser aplicada a uma situação real. Por exemplo, uma função.

2 - O que é a modelação matemática?

A modelação matemática consiste na aplicação de uma expressão matemática a uma situação real, a um problema da vida real.

3 - Segundo o seu ponto de vista, diga qual a utilidade da modelação matemática.

A modelação matemática é útil, uma vez que facilita o estudo de um problema real e prático.

1- Um modelo matemático é uma função na qual se analiza determinados dados.

2- Modelação matematica são as alterações que se fazem à função mãe.

3- a modelação matemática ajuda-nos a tratar alguns problemas reais, como por exemplo aquele exemplo dos corvos e buzios. Constrói-se um grafico e através dele conseguimos ver mais dados do que os que nos foram dados.

1. Um modelo matematico é uma função racional que se pode chegar apartir de translações de outras.

2. A modelação matemática é um conjunto de metodos como translações para chegar a uma certa função

3. A modelação matematica permite-nos reproduzir graficamente uma função mais complesca apartir de outras mais simples

Para alguns alunos não ficou claro que um modelo matemático de um fenómeno real consiste num conjunto de regras ou leis matemáticas que representam adequadamente esse fenómeno.

No que concerne à primeira questão, são encontradas várias respostas que sugerem que um modelo matemático é especificamente uma função racional, porém cerca de metade da turma afirma que um modelo pode ser definido por uma função qualquer desde que se ajuste aos dados.

Relativamente à segunda questão, todos os alunos, sem exceção, ficaram com a ideia de que a modelação matemática é um processo que os ajuda a encontrar um modelo matemático adequado.

Na terceira e última questão, as respostas foram variadas, muitos afirmaram que a utilidade da Modelação Matemática passa por facilitar o estudo de um problema real, outros, por seu lado, continuam influenciados pela aplicação da função racional e concluem relativamente a este tipo de função, afirmando que o processo de modelação matemática os ajudou a compreender melhor as translações de uma função racional. Alguns alunos não conseguiram identificar qualquer interesse neste novo processo de resolver problemas reais.

No geral os alunos responderam de uma forma bastante positiva à última questão, dentro dos diferentes contextos das suas respostas, os alunos concordaram que a Modelação Matemática os ajudou a compreender melhor certos conceitos matemáticos.

No caso particular da Maria, do Guilherme e do Gabriel, a Maria responde com a sua coerência habitual, as suas respostas mostram algum rigor e especialmente que teve com atenção a todo o processo de modelação matemática. Na primeira questão afirma que um modelo matemático é uma expressão conhecida, possível de ser aplicada a uma situação real. A Modelação Matemática é o processo que aplica essa expressão a uma situação real e a grande utilidade apontada pela Maria é uma maior facilidade no estudo de um problema real e prático.

O Guilherme mostra-se um pouco confuso nas duas primeiras respostas, inicialmente diz que um modelo matemático é uma função qualquer, mas na questão seguinte descreve uma "função mãe", mnemónica característica utilizada nas aulas de transformações de funções racionais. Curiosamente, o Guilherme é o aluno que dá a resposta mais interessante da turma à questão da utilidade da Modelação Matemática, estando implícita na sua linguagem, que a modelação matemática poderá ser útil no sentido de existir a possibilidade de fazer previsões sobre certos e determinados acontecimentos.

O Gabriel está convencido, até efetuar a Tarefa 2, de que um modelo matemático é apenas uma função racional. Mostra alguma confusão nas respostas dadas às restantes questões, sendo todas elas pautadas com aspetos inerentes às funções racionais.

II.4.2.3. Tarefa 2

À semelhança da Tarefa 1 não foi pedido aos alunos para identificarem os aspetos da realidade que interessavam modelar, nem a simplificação do problema com vista à sua tradução num enunciado claro e sucinto. O processo de modelação matemática inicia novamente com um problema já simplificado, contudo, dada a curiosidade da investigadora, desta vez houve a tentativa de exploração das duas etapas ausentes, da seguinte forma:

- Antes de entregar a tarefa 2, foi disponibilizada, aos alunos, uma tabela, do Observatório Astronómico de Lisboa (anexo IV), onde são indicados os dados reais do Nascimento e do Ocaso do Sol em Lisboa no ano de 2011.
- A investigadora questionou os alunos acerca do seguinte: "Com os dados desta tabela o que seria interessante estudar?", "De que forma simplificariam o problema de modo a facilitar a sua resolução?"

A informação desta tabela surtiu algum interesse nos alunos, principalmente quando verificaram a diferença da duração dos dias entre junho e dezembro. Mostraram também entusiasmo e imaginação nas respostas à questão, colocada oralmente: "Com os dados desta tabela o que seria interessante estudar?" Respostas de alguns alunos:

  - "Os meses em que a duração dos dias é semelhante".
  - "Qual a variação máxima da temperatura média do dia ao longo do ano?".
  - "Estudar a duração média do dia durante o ano inteiro".

No que concerne à simplificação do problema, algumas sugestões dos alunos passaram por:

- Fazer a diferença entre o nascer e o ocaso do sol no primeiro dia de cada mês e estudar a situação.
- Fazer a média de horas diárias de sol em cada mês e estudar a situação.

Depois desta pequena troca de ideias, a confrontação do enunciado com os dados apresentados na tabela, do Observatório Astronómico de Lisboa, não foi difícil para os alunos.

A descoberta do modelo matemático que relaciona o mês com a duração média do dia também não foi complicada. Por imitação de procedimentos da primeira aula de Modelação Matemática, sem qualquer intervenção por parte da investigadora, os alunos inseriram os dados na calculadora gráfica, analisaram a nuvem de pontos obtida e foi com relativa facilidade que os mesmos repararam que não se tratava de uma função racional.

Houve indecisões entre duas funções possíveis de ajustar aos dados, alguns alunos disseram que o modelo adequado seria uma função de segundo grau, porém, muito pertinentemente e corretamente, o Hugo interviu e disse que poderia tratar-se de uma função trigonométrica por causa do período. Ou seja, o que ele notou é que o comportamento daquela nuvem de pontos se repetia se considerasse por exemplo três anos e daí ter concluído que, possivelmente, o modelo não seria uma função de segundo grau. Talvez esta tenha sido uma das conclusões mais interessantes da turma ao longo da aula.

Depois de encontrado o modelo matemático os alunos responderam à questão 1.2 da Tarefa 2: "Tendo em conta o modelo encontrado, coloque-se na pele de um investigador e formule questões que lhe pareçam adequadas e pertinentes."

As respostas a esta questão surpreenderam não só pela imaginação e criatividade, mas também pelo seu conteúdo, observe-se:

1.2-. Porque é que no hemisfério sul e norte as horas de nascer o sol e de se pôr é diferente em cada mês?
· Quando é que as horas dos hemisferios são iguais, em que meses isso acontece?
· Em que meses o dia é mais pequeno?

1.2 Mostre que o mês de junho apresenta a maior duração média de horas.

1.2 → Qual o mês que tem a duração média do dia mais elevada? use processos analíticos.
→ Qual o mês com uma menor duração media do dia? use apenas processos analíticos.
→ Quais os meses em que poderemos estar quando a duração do dia é por volta das 11:30?

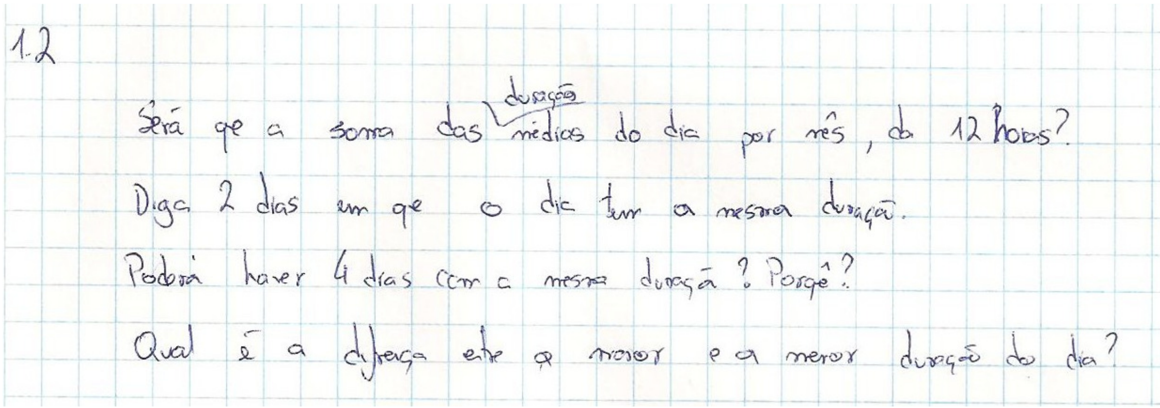
1.2
Em que dia do mês a duracão do dia é maior?
Em que dia do mês a duração do dia é menor?
Existe dias com a mesma duracão?

1.2 • Se a duração do dia for de 11 horas, de que mês pertence esse dia?
• Em que mês a duração de um dia é maior.

1.2) - Em que mês a duração do dia é maior?
- Em que mês/meses a duração do dia é menor?
- De acordo com os resultados, compara-os com as estações do ano.
- Em que hemisfério estamos?
- Em que mês estamos quando a duração média do dia é por volta de 12 horas?
- Calcula $f(x) = 6$, e diz o que significa no contexto do problema
- Calcula a duração média do dia no ano inteiro?

Respostas da Maria, do Guilherme e do Gabriel, respetivamente:

1.2) A que corresponde o máximo e o mínimo da função no contexto apresentado?
Com que periodicidade se atingem os máximos e os mínimos?
Qual a variação máxima da temperatura média do dia ao longo do ano?
Qual o domínio e o contradomínio da função?
Em que meses a duração média do dia é semelhante?

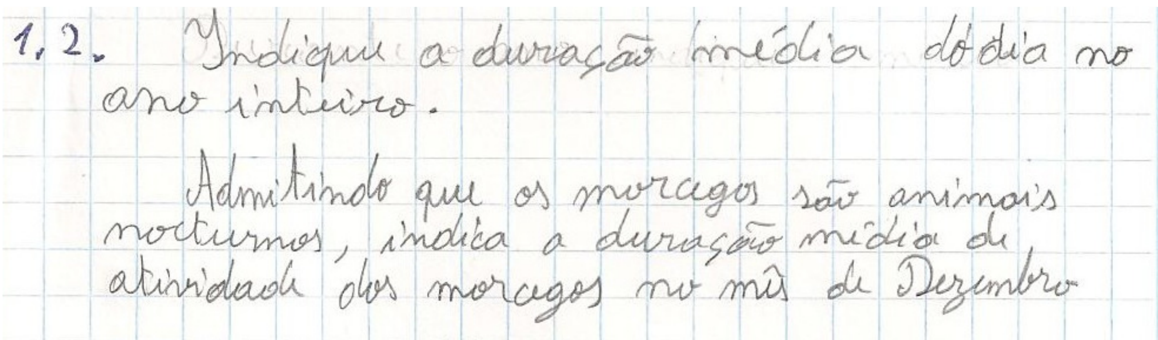

1.2

Será qe a soma das duração médias do dia por mês, dá 12 horas?

Diga 2 dias em qe o dia tem a mesma duração.

Poderá haver 4 dias com a mesma duração? Porqê?

Qual é a diferença entre a maior e a menor duração do dia?


1.2. Indique a duração média do dia no ano inteiro.

Admitindo que os morcegos são animais nocturnos, indica a duração média de atividade dos morcegos no mês de Dezembro

A Maria mais uma vez mobiliza com facilidade os seus conhecimentos e aplica-os sem dificuldade, estabelecendo sempre uma ponte entre o real e a matemática, note-se que esta aluna, depois de obter o modelo, interpreta-o num contexto matemático para posteriormente tirar conclusões sobre o problema real, daí as suas questões sobre a periodicidade, do máximo e mínimo, do domínio e contradomínio da função, passando de uma forma bastante intuitiva as três primeiras etapas do processo de modelação matemática.

O Guilherme e o Gabriel, à semelhança de todos os seus colegas de turma, sentiram dificuldades em mobilizar ferramentas e conceitos matemáticos para aplicar ao contexto em questão, focalizaram-se bastante no problema real e consequentemente o encontro entre a matemática e o real tornou-se numa tarefa complicada. Ainda na resposta a esta questão, é importante sublinhar, que os alunos não se questionaram acerca da utilidade do modelo encontrado na alínea anterior, ou seja, os alunos na primeira questão encontraram o modelo adequado à informação disponibilizada no enunciado, contudo não utilizaram essa ferramenta para colocarem as suas próprias questões. Para eles as perguntas 1.1 e 1.2 não se relacionaram, tornando-se evidente que o primeiro impulso dos alunos foi descobrir o modelo mecanicamente, única e exclusivamente porque o tinham feito na primeira aula de modelação matemática.

O Gabriel foi bastante original ao inventar uma questão que tornasse a resolução do problema mais interessante, segundo o seu ponto de vista relacionar a duração média do dia com o facto de os morcegos serem animais noturnos tornaria o problema mais apelativo.

É curioso verificar que quando terminaram a pergunta 1.2 e iniciaram a leitura das questões seguintes utilizaram, sem qualquer dúvida ou dificuldade, o modelo encontrado na pergunta 1.1.

A análise e resolução do problema é feita agora sem obstáculos, mostrando mais uma vez que os alunos são efetivamente portadores de conhecimento.

Síntese

Neste segundo contacto com a Modelação Matemática, as dificuldades encontradas numa primeira abordagem mantiveram-se presentes. Sendo de salientar o facto de um dos alunos da turma ter mobilizado o seu conhecimento de uma forma excecional, quando interrompeu um aluno para o informar que o modelo poderia ser uma função trigonométrica e não uma função de segundo grau.

Assim, os saberes e conhecimentos dos alunos que parecem ter assumido maior relevo nesta tarefa foram no geral:

- Mobilização de alguns conhecimentos na procura do modelo matemático, nomeadamente saberes sobre o estudo de uma função trigonométrica, referência ao período deste tipo de funções.
- Bom conhecimento matemático das matérias dadas anteriormente.
- Boa capacidade de resolução e interpretação dos exercícios (depois da transformação do problema real para um problema matemático).

Relativamente às dificuldades manifestadas pelos alunos:

- Estabelecer relações entre o modelo já encontrado e as possíveis questões a colocar ao problema;
- A falta de sentido crítico;
- Entrar em linha de conta com vários dados em simultâneo e estabelecer uma relação entre a informação obtida e o problema real.

Em suma, os alunos concluiram da aula anterior que, o primeiro passo seria encontrar um modelo matemático e depois responder às questões colocadas no enunciado sobre o mesmo. Nesta segunda abordagem notou-se uma maior destreza na reação dos alunos ao problema real. Os maiores obstáculos continuam a ser a falta de sentido crítico e a relação entre a linguagem real e a linguagem matemática. Porém, numa tentativa de encontrar um modelo que melhor se adequasse aos dados, um dos alunos mobilizou o seu conhecimento de uma forma excelente.

Verificou-se também a grande necessidade dos alunos em estabelecer rotinas, os processos rotineiros parecem ser uma constante nas metodologias de aprendizagem dos alunos. Associada a estas rotinas esteve a falta de sentido crítico, repare-se que quando os alunos tiveram que estabelecer relações entre o real e a matemática, colocando questões sobre o problema, constatou-se que a maioria não utilizou o conhecimento prévio do modelo matemático para a elaboração das suas questões.

Reflexão

Como investigadora penso que seria uma mais valia para este trabalho ter insistido nas respostas dos alunos e efetivamente serem eles a identificar e a simplificar o problema. Porém, não consegui fazê-lo por motivos vários. Insisti em inserir esta pequena troca de ideias entre mim e os alunos antes de iniciarmos a Tarefa 2, porque aconselho ao leitor, que estiver interessado em realizar um estudo semelhante, que aprofunde estes dois passos do processo de Modelação Matemática.

II.4.2.4. Tarefa 3

Talvez o tema escolhido para a tarefa 3 não tenha sido de grande interesse para os alunos, o entusiasmo presente nas outras aulas de modelação matemática faltou na resolução deste problema. Nos temas anteriores verificou-se algum interesse na leitura do enunciado, foram estabelecidas conversas entre os alunos sobre os temas e no geral a participação oral dos alunos foi boa.

É importante referir que a aula de desenvolvimento da tarefa 3 foi diferente das anteriores, no sentido de que foi uma aula de introdução a uma nova matéria, as funções irracionais.

A tabela desta atividade era constuída por duas variáveis, a altura do observador e a distância que a vista consegue alcançar. No exercício 1.1 foi proposto aos alunos encontrarem uma relação entre a raíz quadrada da altura do observador e a distância que a vista consegue alcançar. A observação dos dados obtidos indicava uma possível relação de proporcionalidade direta entre estas variáveis. As primeiras dificuldades dos alunos manifestaram-se nesta questão, na medida em que nenhum dos alunos mobilizou os seus conhecimento, para conjeturar sobre a relação entre estas duas variáveis. As conjeturas surgiram apenas após algumas intervenções por parte da investigadora. Dado que se tratava de uma primeira abordagem às funções irracionais, não era esperado que os alunos tivessem facilidade de encontrar o modelo adequado aos dados do enunciado.

Depois de encontrada a relação de proporcionalidade entre as duas variáveis, na questão 1.2 os alunos tinham em seu poder a seguinte equação $d = k\sqrt{h}$., uma vez que conjeturaram que $\frac{d}{\sqrt{h}} = k$. Era suposto que, aplicando saberes adquiridos anteriormente, os discentes encontrassem um modelo que se ajustasse ao problema, por tentativa e erro dos valores da constante k.

Alguns alunos mobilizaram os seus conhecimentos corretamente, contudo houve experiências menos boas na atribuição de valores a k. A investigadora não interviu e deixou que os alunos, com mais dificuldades nesta questão, chegassem às suas próprias conclusões sozinhos.

Ultrapassada a fase inicial da busca pelo modelo adequado, os alunos conseguiram avançar e mobilizar corretamente os seus conhecimentos.

Mais uma vez, vale a pena referir que, depois de construído o modelo, as perguntas parecem ser iguais a tantas outras já resolvidas nas aulas de matemática pelos alunos. Observe o leitor que os manuais dão grande ênfase a problemas ligados a situações reais, portanto estes alunos estão habituados a resolver problemas reais utilizando ferramentas matemáticas.

Síntese

O leitor deve ter em conta que este é apenas o terceiro contacto dos alunos com a Modelação Matemática. É natural que as dificuldades manifestadas pelos mesmos se mantenham presentes na tarefa 3.

Relativamente aos saberes e conhecimentos dos alunos é de evidenciar os seguintes pontos:

- Mobilização de alguns conhecimentos na procura do modelo matemático, nomeadamente quando tentavam encontrar o modelo adequado dando valores ao parâmetro k.
- Boa capacidade de resolução e interpretação dos exercícios.

As dificuldades manifestadas pelos alunos que parecem ter assumido maior relevo nesta tarefa, foram no geral:

- Estabelecer relações entre o mundo real e o mundo matemático com o objetivo de definir o problema, neste caso encontrar o modelo matemático;
- Construir o modelo matemático;
- Mobilizar o conhecimento fora do âmbito das funções irracionais, nomeadamente, na proporcionalidade direta entre duas variáveis.

Para sintetizar, quando é pedido aos alunos para analisarem a tabela construída no exercício 1.1, estes não conseguem manifestar-se e/ou fazer sugestões. Talvez os discentes não tenham conseguido mobilizar os seus conhecimentos sobre proporcionalidade direta entre duas variáveis, por não ser uma relação muito evidente e fácil de identificar num contexto de funções irracionais.

II.4.3. Inquérito final

Com o objetivo de deixar o processo de Modelação Matemática sedimentar e ganhar forma na mente dos alunos, o inquérito final foi distribuído alguns dias depois da resolução da última tarefa. Este inquérito foi dividido em duas partes distintas, a primeira parte era constituída pelas três questões, colocadas anteriormente, com vista a conhecer as conceções dos alunos sobre a Modelação Matemática e também com a finalidade de obter uma possível comparação e evolução dos conceitos.

A segunda parte do inquérito era constituída por perguntas de resposta aberta e perguntas de resposta fechada e tinha como propósito nuclear, verificar qual a apreciação e opinião dos alunos acerca das aulas de Modelação Matemática.

II.4.3.1. Conceções dos alunos sobre a Modelação Matemática – Parte II

Observe-se que as respostas que se seguem foram escolhidas tendo em conta a opinião geral dos alunos, ou seja, os excertos escolhidos pretendem refletir as conceções gerais da turma.

1. Para si, o que é um modelo matemático?

É uma função que permite relacionar dados de um problema.

2. O que é, para si, a modelação matemática?

É a forma de relacionar questões reais.

3. Segundo o seu ponto de vista, diga qual a utilidade da modelação matemática.

É importante a nível de problemas reais.

1. Para si, o que é um modelo matemático?

Modelo matemático é a expressão analítica que nos permite relacionar os dados num problema.

2. O que é, para si, a modelação matemática?

Modelação matemática são as transformações realizadas no modelo matemático, de modo a uma melhor adaptação ao problema

3. Segundo o seu ponto de vista, diga qual a utilidade da modelação matemática.

É útil de modo a adaptar às situações do dia-a-dia, ou seja, situações reais.

1. Para si, o que é um modelo matemático?

É ~~[illegible]~~ que é aplicado à vida real comummente uma função

2. O que é, para si, a modelação matemática?

~~[illegible]~~ São funções

3. Segundo o seu ponto de vista, diga qual a utilidade da modelação matemática.

Pode-se aplicar para prever acontecimentos

As respostas dos alunos Maria, Guilherme e Gabriel, respetivamente:

1. Para si, o que é um modelo matemático?

Um modelo matemático é uma expressão matemática que é possível aplicar a uma situação real.

2. O que é, para si, a modelação matemática?

A modelação matemática consiste em encontrar modelos matemáticos adequados a determinados problemas.

3. Segundo o seu ponto de vista, diga qual a utilidade da modelação matemática.

É útil para aplicar a matemática a situações reais.

1. Para si, o que é um modelo matemático?

É a expressão pr[illegible]

2. O que é, para si, a modelação matemática?

É encontrar expressões matemáticas o mais precisas possível aos ~~pontos~~ pontos, de preferência que passem por eles.

3. Segundo o seu ponto de vista, diga qual a utilidade da modelação matemática.

Podem ser aplicados na vida real, como naquele problema dos copos e búzios, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ e analisar a nuvem de pontos para ver qual é o conjunto de dados mais satisfatório.

1. Para si, o que é um modelo matemático?

Um modelo matemático é um conjunto de pontos de um gráfico, obtidos experimentalmente, correspondentes a resultados observados.

2. O que é, para si, a modelação matemática?

A modelação é o conjunto de métodos usados para formular uma função relativa aos resultados obtidos.

3. Segundo o seu ponto de vista, diga qual a utilidade da modelação matemática.

Formular funções com vista à previsão de certos acontecimentos

No geral houve uma evolução dos conceitos ao longo das sessões. Todos os alunos responderam que um modelo matemático era uma função ou uma expressão matemática possível de aplicar a um problema real. A questão de ser uma função racional foi completamente ultrapassada.

Relativamente à Modelação Matemática, a maioria dos alunos continua a achar que é o processo adotado para encontrar o modelo matemático, alguns afirmam também que a Modelação Matemática é o próprio Modelo Matemático.

A utilidade deste novo processo, do ponto de vista da investigadora, foi a resposta que sofreu maior evolução, uma vez que a maioria dos alunos afirma que a Modelação Matemática é útil na aplicação de problemas reais e ainda na previsão de certos acontecimentos relacionados com esses mesmos problemas.

A Maria responde de forma clara e com algum rigor às perguntas que lhe são colocadas. As suas respostas quase parecem fotocópias das anteriores, contudo as explicações dadas no primeiro inquérito são mais rigorosas, por exemplo, logo na primeira questão a Maria foca que um modelo matemático é uma expressão matemática conhecida e aplicada a uma situação real, exemplificando que poderia ser uma função. Neste último inquérito diz apenas tratar-se de uma expressão matemática aplicada a um contexto real. Para esta aluna, a modelação matemática continua a ser um processo para construir o modelo matemático adequado ao problema em questão. Para a Maria a utilidade da Modelação Matemática continua a ser a mesma, a sua fácil aplicação a problemas reais.

No caso do Guilherme, todas as respostas se resumem a encontrar um modelo que se adeque aos dados do problema. Curiosamente, este aluno remete-se novamente para a tarefa dos Corvos e dos Búzios, verificando-se que a ideia que ele tem de modelação matemática ficou de alguma forma ligada a esta tarefa. É importante referir novamente que, foi também com esta primeira tarefa que este aluno desmotivado e desinteressado, respondeu de forma interessante e única à questão sobre a utilidade da modelação matemática.

Relativamente ao Gabriel, parece estar patente nas suas respostas uma evolução, talvez a maior evolução dos três, para ele um modelo matemático deixou de ser especificamente uma função racional para passar a ser um conjunto de pontos que se aplica aos dados do enunciado. No que toca à modelação matemática, para ele é um conjunto de métodos que o ajudam a encontrar o modelo matemático e relativamente a esta questão a sua opinião não mudou de um inquérito para o outro. Acerca da utilidade da Modelação Matemática, desta vez coube ao Gabriel, à semelhança do Guilherme no primeiro inquérito, referir que a utilidade da modelação matemática é formular funções com vista à previsão de certos acontecimentos.

II.4.3.2. Apreciação e opinião dos alunos acerca das aulas de Modelação Matemática

Pretende-se averiguar qual o entendimento dos alunos acerca das aulas de Modelação Matemática. Serão, de seguida, apresentadas algumas figuras que sintetizam as respostas dadas pelos alunos às questões da segunda parte do inquérito final.

Indique quais as suas maiores dificuldades perante os problemas de modelação matemática apresentados nas aulas?

Figura II.3.1: Gráfico de barras relativo às respostas dos alunos sobre as suas maiores dificuldades

Cerca de 59% dos alunos sentiram dificuldade em encontrar o modelo matemático adequado aos dados das tarefas. Quatro alunos diz não ter sentido qualquer dificuldade, o que se reflete em 18% dos inquiridos. Outras dificuldades passaram pela resolução e interpretação do problema, cada uma com 5% dos alunos. A utilização da calculadora gráfica também foi um obstáculo apontado pelos alunos, refletindo-se em 5% dos discentes a dar esta resposta.

Mais de metade dos alunos da turma respondeu que sentiu necessidade de mais tempo para resolver as tarefas de Modelação Matemática, refletindo-se em 64% dos inquiridos com esta resposta. A grande maioria, 77% dos discentes, afirma que o trabalho desenvolvido foi eficaz em termos da sua aprendizagem, o que corrobora na íntegra o que anteriormente tinha sido verificado, de alguma forma os alunos concordaram que a Modelação Matemática os ajudou a compreender melhor certos conceitos matemáticos aplicados na resolução das tarefas.

Qual a vantagem de usar novas tecnologias na resolução de problemas de modelação matemática?

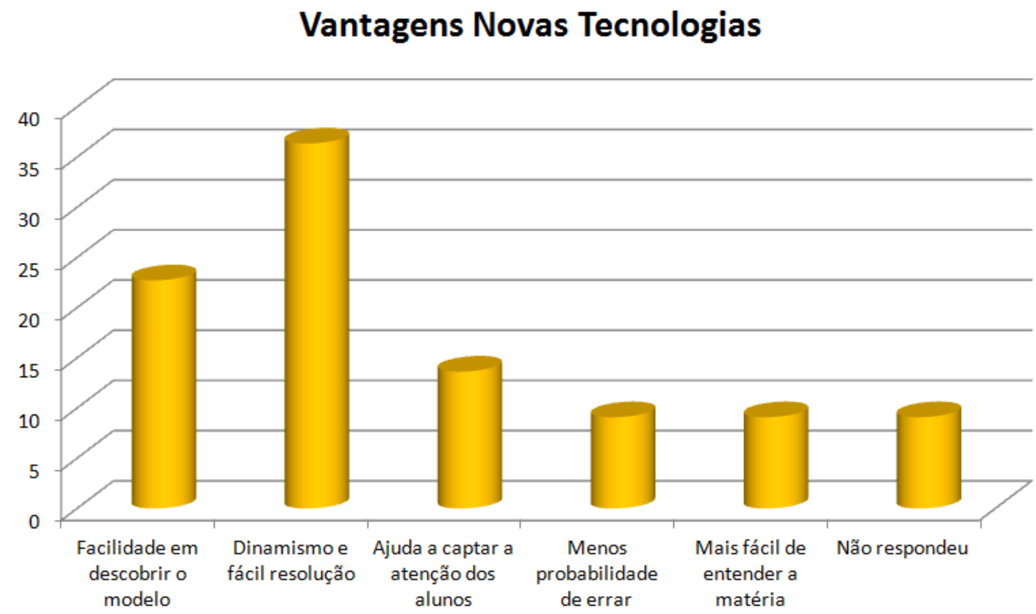


Figura II.3.2: Gráfico de barras relativo às respostas dos alunos sobre as vantagens das Novas Tecnologias

Para 23% dos alunos as novas tecnologias facilitam a descoberta do modelo matemático. Para 36% dos inquiridos a calculadora gráfica é um instrumento que ajuda, não só a dinamizar as aulas, mas também ajuda a uma mais fácil resolução dos problemas. Três pessoas, 14% dos alunos, responderam que as novas tecnologias ajudam a captar a sua atenção.

Outras vantagens passam pela facilidade de entender a matéria e existir uma probabilidade menor de errar quando é utilizada a calculadora gráfica, ambas com 9% da totalidade das respostas.

As descrições que se seguem são relativas a frases que os alunos classificaram de acordo com um número de 1 a 5. O aluno atribui a classificação 1 se discorda totalmente da frase, 2 se apenas discorda, 3 se não tem opinião, 4 se concorda e 5 se concorda totalmente com a afirmação.

A1 - Não consegui entender como é que a modelação matemática se relaciona com os problemas reais e para mim não existe qualquer interesse na resolução de problemas de Modelação Matemática

A opinião de cerca de 40% dos alunos, manteve-se neutra quando classificou a frase supracitada. Aproximadamente 53% dos inquiridos garante que é interessante resolver problemas deste tipo e 41% dos mesmos afirma que conseguiu entender bem, como é que a Modelação Matemática se relaciona com os problemas reais.

É importante referir que uma minoria, de dois alunos, diz concordar com a afirmação A1.

Assim, apesar da ausência de opinião por parte de alguns inquiridos, uma parte significativa dos alunos da turma garante que conseguiu entender, não só, como é que o processo de Modelação Matemática se relaciona com os problemas reais, mas também encontrou algum interesse na resolução das tarefas desenvolvidas na sala de aula.

A2 - A modelação matemática facilitou a minha interpretação dos problemas e ajudou-me a compreender melhor certos conceitos matemáticos

À semelhança do que foi referido anteriormente, cerca de 48% dos alunos não tem opinião quando lhes é pedido para classificar a afirmação A2, porém quase metade dos inquiridos responde de forma positiva, afirmando que a Modelação Matemática facilitou, não só, a sua interpretação dos problemas, mas também os ajudou a compreender melhor certos conceitos matemáticos aplicados a este tipo de problema. Cerca de 10% dos alunos diz ainda discordar ou discordar totalmente com a afirmação.

A3 - As aulas de modelação matemática ajudaram-me a saber utilizar certos conceitos matemáticos em situações reais

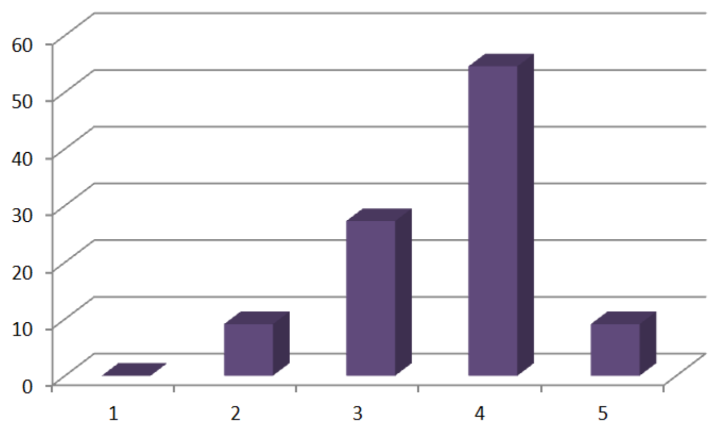


Figura II.3.4: Gráfico de barras relativo às classificações dos alunos à afirmação A3

Observe-se que 55% dos alunos é da opinião de que a Modelação Matemática os ajudou a saber utilizar conceitos matemáticos em situações reais, sendo ainda 9% dos inquiridos totalmente de acordo com a frase, ou seja, um total de 64% dos discentes concorda com a afirmação A3.

A resposta neutra cabe a 27% dos alunos, havendo apenas 9% que afirma que as aulas de modelação matemática não os ajudaram a saber utilizar certos conceitos matemáticos em situações reais.

Nunca é demais salientar que, em relação a esta questão, a opinião dos alunos se mantém desde os primeiros inquéritos, o trabalho desenvolvido, neste contexto de Modelação Matemática, foi na opinião dos inquiridos eficaz na aprendizagem e compreensão de certos conceitos matemáticos.

A4 - A modelação matemática torna as aulas de matemática mais dinâmicas e interessantes

Relativamente ao dinamismo e interesse deste tipo de aulas, cerca de 37% dos alunos abstém-se novamente, porém uma grande maioria, aproximadamente 63% dos inquiridos, afirma que a Modelação Matemática torna as aulas mais dinâmicas e interessantes. É de observar que nenhum dos discentes responde de forma negativa à afirmação A4.

A5 - Os problemas apresentados nas aulas eram interessantes e originais

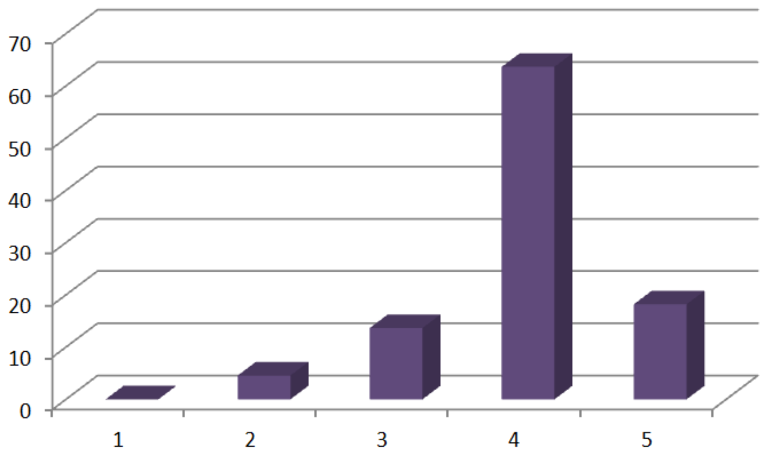


Figura II.3.5: Gráfico de barras relativo às classificações dos alunos à afirmação A5

Uma maioria significativa dos inquiridos, mais especificamente 64% dos alunos, diz concordar com a afirmação A5, existindo ainda 18% dos inquiridos a concordar totalmente com a frase, ou seja, cerca de 82% dos alunos desta turma afirma que os problemas de Modelação Matemática, resolvidos na sala de aula, eram interessantes e originais.

Apenas 14% dos discentes se mantém em terreno neutro, não concordando nem discordando com a afirmação e aproximadamente 5% diz não achar os problemas interessantes e originais.

Síntese

A maior dificuldade apontada pelos alunos foi a construção do modelo matemático, refletindo-se em 59% dos inquiridos. Apesar de uma pequena minoria ter apontado a calculadora gráfica como um obstáculo a todo o processo de Modelação Matemática, segundo a opinião de aproximadamente 36% dos alunos, esta tecnologia é um instrumento que ajuda, não só a dinamizar as aulas, mas também a uma mais fácil resolução dos problemas. Note-se que 23% dos discentes responderam ainda que as novas tecnologias lhes facilitaram a descoberta do modelo matemático.

Foi sentida a necessidade de mais tempo para resolver as tarefas de Modelação Matemática por mais de metade dos inquiridos, cerca de 64%.

É de salientar que está presente alguma indiferença, por parte de 40% dos alunos da turma, no que concerne ao entendimento da relação da modelação matemática com os problemas reais, porém cerca de 41% afirmaram conseguir entender esta relação.

Metade da turma diz que a Modelação Matemática facilitou, não só, a sua interpretação dos problemas, mas também os ajudou a compreender melhor certos conceitos matemáticos aplicados na resolução das tarefas, contudo cerca de 48% dos alunos insiste em não ter uma opinião sobre o assunto.

Cerca de 64% dos inquiridos, afirma que a Modelação Matemática os ajudou efetivamente a saber utilizar certos conceitos matemáticos em situações reais, sendo ainda 77% da opinião de que o trabalho desenvolvido foi eficaz em termos da sua aprendizagem.

Observe-se também que, para 82% dos alunos os problemas apresentados nas aulas foram interessantes e originais afirmando ainda, cerca de 63% dos inquiridos, que a modelação matemática torna as aulas de matemática mais dinâmicas e interessantes, existindo até algum interesse na resolução deste tipo de problemas. Atente o leitor que se tratam apenas das opiniões dos alunos sobre as aulas de modelação matemática, torna-se complicado para a investigadora provar esta eficácia nos procedimentos e processos utilizados.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

No capítulo anterior foram apresentados e discutidos os resultados obtidos ao longo das diversas fases da investigação. Este capítulo tem como finalidade a apresentação das conclusões do estudo, tendo sempre em conta as questões formuladas no início deste trabalho. Este capítulo irá iniciar com um breve resumo da investigação, depois serão apresentadas as principais conclusões do estudo e finalmente serão feitas algumas recomendações para investigações futuras.

II.5.1. Resumo da Investigação

Os objetivos nucleares desta investigação são verificar se os alunos mobilizam os seus conhecimentos num contexto de Modelação Matemática, investigando quais os seus saberes, tentar entender quais as principais dificuldades dos mesmos perante situações problemáticas do mundo real, e finalmente averiguar se será possível desenvolver nos alunos uma atitude crítica quando expostos às situações anteriores.

A investigação decorreu ao longo do segundo período letivo, nas aulas de Matemática A numa turma do 11º ano de escolaridade, na Escola Secundária Jorge Peixinho. No que concerne à recolha de dados, foi adotada uma metodologia qualitativa seguindo uma estratégia de estudo de caso. Foram propostas três tarefas sobre Modelação Matemática aos alunos da turma e escolhidos três deles para uma observação mais atenta por parte da investigadora. As técnicas utilizadas foram a observação, a análise documental e o inquérito por questionário. Deve ainda ser referido que os registos da observação foram feitos por escrito pela investigadora que procurou, sempre que possível, anotar as declarações dos alunos no decurso dos seus diálogos. Foram colocadas também três questões de resposta aberta sobre Modelação Matemática que serviram essencialmente para recolher dados descritivos na escrita dos alunos e conhecer melhor algumas conceções dos mesmos. No final das três sessões, foi lhes entregue um questionário confidencial que tinha como principal propósito verificar qual a apreciação e opinião dos alunos acerca das aulas de Modelação Matemática.

Por fim, procedeu-se à análise de todos os dados recolhidos, seguindo-se, no presente capítulo, as conclusões do estudo.

II.5.2. Conclusões do Estudo

Foram propostas três tarefas à turma do 11º ano de escolaridade e, em cada situação, os alunos deveriam criar um modelo matemático, aperfeiçoado, normalmente por tentativa e erro, num processo de Modelação Matemática.

No trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo destas três sessões foram verificadas as seguintes fases:

II.5.2.1. Interpretação dos problemas

No geral não foram sentidas dificuldades na interpretação do enunciado das tarefas. Os alunos mostraram-se muito recetivos e entusiasmados com os temas escolhidos nas duas primeiras sessões.

II.5.2.2. Procura do modelo matemático

Ao longo das aulas de Modelação Matemática foi sentida uma pequena evolução no que concerne à mobilização dos conhecimentos dos alunos quando confrontados com situações inesperadas, imprevisíveis e que exigiam sentido crítico e de aplicação de ferramentas e técnicas matemáticas. Por exemplo, a observação brilhante do Hugo quando tentava encontrar o modelo adequado ao enunciado da tarefa 2, referindo com determinação que o modelo adequado não seria uma função de segundo grau mas sim uma função trigonométrica, e o desempenho de alguns alunos na construção do modelo da tarefa 3.

A maior dificuldade dos alunos foi a passagem dos dados reais, do enunciado de cada tarefa, para um modelo matemático adequado, porém atente o leitor que a resolução deste tipo de problemas é uma forma de atividade intelectual complexa (Lester, 1994) e não obstante foi o primeiro contacto dos alunos com a modelação matemática.

Os discentes, numa resposta ao inquérito final, também apontaram a construção do modelo matemático como a sua principal dificuldade. Será então pertinente recordar algumas dificuldades demonstradas ao longo de todo o processo, por exemplo, a frequente utilização do senso comum para estabelecer relações entre os seus saberes matemáticos e a informação disponível no problema, na Tarefa 1 quando os alunos, apesar de saberem o que é uma função racional e saberem aplicar este conhecimento em problemas dados à partida com relativa facilidade, não conseguiram relacionar a nuvem de pontos com uma função racional e mesmo depois de concluirem que se poderia tratar efetivamente de uma função deste tipo, não conseguiram novamente aplicar os conhecimentos aprendidos nas aulas imediatamente anteriores.

Na Tarefa 3, os alunos também sentiram dificuldades em encontrar uma relação de proporcionalidade direta entre duas variáveis. É possível que esta última dificuldade tenha surgido por não ser uma relação evidente e por se tratar de um problema que envolvia funções com radicais.

Recorde-se também que, na literatura referida neste estudo, a abordagem a um determinado problema pode ser condicionada pelo contexto em que é apresentada. Os resultados de um estudo de Saljo e Wyndhamn (1993) mostram que quando é pedido aos alunos para resolverem a mesma tarefa na disciplina de Matemática e na disciplina de Estudos Sociais, a maioria na aula de Matemática tende a fazer um conjunto de cálculos para chegar a uma resposta enquanto que, na aula de Estudos Sociais, a abordagem dos alunos ao mesmo problema passa pela simples análise da tabela.

É provável que os alunos construam categorias para procedimentos diferentes a adotar numa aula de matemática e a adotar noutras disciplinas e tal como Lesh (1990) afirma, os alunos tendem a suspender os seus conhecimentos sobre o mundo real quando resolvem problemas de Matemática. Na resolução das três tarefas os alunos também tenderam a separar o que conhecem do mundo real e o que conhecem do mundo matemático, mas atente-se que esta situação foi verificada apenas na construção do modelo, apenas na zona de imprevisibilidade e novidade do problema.

Lester (1994) também afirma que para melhorar as suas capacidades de resolução, os alunos devem resolver muitos problemas, esta turma parece ser um bom exemplo para corroborar esta afirmação, uma vez que o contacto frequente dos mesmos com tarefas em contexto real desenvolveu a sua capacidade de resolver problemas reais, daí a facilidade destes alunos em resolver e interpretar as tarefas depois de encontrado o modelo matemático, estabelecendo com frequência relações entre a matemática e o real.

Um maior número de aulas de modelação matemática poderia facilitar a compreensão da relação que lhes é pedida no enunciado de cada tarefa, bem como a utilidade da calculadora gráfica neste tipo de problema.

II.5.2.3. Rotinas

Como já foi referido na Revisão da Literatura, Abrantes (1995) afirmou que um obstáculo a ter em conta é o sentimento de maior segurança, por parte dos alunos, em atividades rotineiras.
Também Silva (1992) afirma que "a teoria não existe por acaso, existe (…) enraizada na realidade do mundo que nos rodeia" (p. 4) e o aluno que não conseguir aperceber-se desse facto não fará mais do que "repetir mecanicamente a teoria, acabando por a esquecer facilmente" (p.4).
À medida que o estudo ia decorrendo, os alunos compreenderam que as tarefas de modelação matemática eram diferentes daquelas que estavam habituados a resolver, pois eram mais morosas e exigiam um processo de resolução desconhecido para eles, ainda assim, os alunos tentaram arranjar rotinas para se sentirem mais seguros na resolução deste tipo de problema. Por exemplo, na pergunta 1.2 da tarefa 2 (Anexo III) quando os alunos tiveram que estabelecer relações entre o real e a matemática, colocando questões sobre o problema, notou-se que, por imitação de procedimentos da aula anterior, os alunos sabiam que o primeiro passo seria encontrar um modelo matemático adequado, contudo não se questionaram sobre a utilidade deste modelo, uma vez que não o utilizaram para responder a esta questão.
Apesar dos programas destacarem cada vez mais a capacidade de "formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade" (ME, 1997, p.3), os processos rotineiros parecem ser ainda algo, em matematica, profundamente enraizado nas metodologias de aprendizagem dos alunos e nas metodologias de ensino dos professores, neste sentido é preciso ter algum cuidado com a falta de sentido critico que estas rotinas podem oferecer aos alunos.

II.5.2.4. Após a construção do modelo matemático

Foi notória a diferença da prestação dos alunos antes e após encontrarem o modelo matemático adequado. Parece que, para a maioria, o mundo real não se relaciona com o mundo matemático, ou melhor, relaciona-se desde que, à partida, não sejam eles a estabelecer essa relação.

Tal como já foi referido, a partir do momento em que é encontrado o modelo matemático, os alunos têm uma boa capacidade de resolução e interpretação dos exercícios, têm as ferramentas matemáticas adequadas à resolução correta do problema.

Uma das ideias subjacentes na literatura referida neste estudo, é a de que as atividades de modelação matemática requerem um maior consumo de tempo e a experiência que serviu de base a este trabalho parece não ter fugido a esta tendência. O tempo disponibilizado pela investigadora para a resolução das tarefas talvez não tenha sido o suficiente, também cerca de 64% dos alunos, nas respostas ao inquérito final, afirmaram que o ideal seria terem mais tempo para a resolução dos problemas. Esta foi sem dúvida a grande limitação deste estudo, a prestação dos alunos poderia ter sido substancialmente diferente se o período tempo disponibilizado para a resolução de cada problema fosse maior.

Abrantes (1995) afirma ainda que um obstáculo a ter em conta em todo este processo é, os programas rígidos não permitirem a realização de um grande número de tarefas de modelação matemática e de um maior desenvolvimento e discussão das que foram orientadas em sala de aula.

Apesar das dificuldades apresentadas pelos alunos do 11º ano de escolaridade na resolução das tarefas propostas, há que ter em conta uma pequena evolução por parte dos mesmos, assim o contacto regular dos alunos com determinadas perspetivas de trabalho contribuiu para uma melhoria do seu desempenho e rendimento na realização das atividades, podendo este facto vir a atenuar o consumo de tempo referido anteriormente.

Uma outra razão apresentada por Niss (1992) refere-se ao facto de o trabalho com aplicações e modelação na matemática escolar ser um veículo para se motivar os alunos e apoiar a aquisição e compreensão de conceitos, métodos e resultados matemáticos. Referindo ainda que, é frequente encontrar alunos francamente desmotivados nas aulas de matemática por não serem capazes de encontrar qualquer utilidade nos conteúdos que aí são tratados.

Neste contexto, é relevante recordar que, o Guilherme, um aluno desinteressado pela disciplina de matemática, na primeira aula de modelação mostrou-se entusiasmado e esforçou-se para retirar algumas conclusões pertinentes sobre a modelação matemática, observe-se que para ele a utilidade deste processo é possibilitar fazer previsões sobre certos e determinados acontecimentos.

Parece poder concluir-se que a modelação matemática poderá ser o veículo para motivar alunos desinteressados, mas que encontram neste processo alguma utilidade para os conceitos aprendidos nas aulas de matemática.

Duas das três questões colocadas no início deste trabalho encontram-se assim respondidas, faltando apenas concluir acerca da possibilidade deste tipo de problema desenvolver nos alunos uma atitude mais crítica perante a realidade e estimular as suas capacidades em situações problemáticas reais. A investigadora acredita que sim, contudo o pouco tempo disponível e apenas três tarefas realizadas em sala de aula, não permitiram retirar conclusões significativas acerca desta questão.

II.5.3. Recomendações para estudos posteriores

Ninguém aprende a andar de bicicleta a olhar ou a ler sobre o assunto, é de extrema importância executar, errar e progredir. Na aplicação da matemática a situações reais também parece ser assim.

Posto isto, é pertinente levar a cabo um estudo mais prolongado, procurando responder mais detalhadamente a todas as questões colocadas no início desta investigação.

Deveria ser disponibilizado mais tempo para a resolução de cada tarefa, bem como um maior número de sessões com recurso a outras ferramentas, tais como o CBL, o CBR e o computador.

Relativamente ao levantamento das conceções dos alunos seria enriquecedor discutir com os próprios alunos o seu desempenho depois da realização das tarefas.

Se a investigadora iniciasse este trabalho novamente, apesar de todos os obstáculos temporais, insistiria nos primeiros pontos inerentes à Modelação Matemática, nomeadamente, a identificação e simplificação do problema real.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1992). Algo de novo no reino da Dinamarca: Notas e impressões de uma visita. *Educação e Matemática*, 22, 19-22.

Abrantes, P. (1995). Matemática, realidade e trabalho de projeto num ambiente de inovação curricular. Em J. Matos, I. Amorim, S. Carreira, G. Mota e M. Santos (Org.), *Matemática e realidade: Que papel na educação e no currículo?* (pp. 77- 123). Lisboa: Secção de Educação Mateniática da SPCE.

Blum, W & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. In *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, 1, p.37-68.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação – uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Carreira, S. (1992*). A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática.

Dias, P. (2005). *Avaliação reguladora no ensino secundário processos usados pelos alunos em investigações matemáticas.* Lisboa: Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências.

Edwards, D. e Hamson, M. (1990). *Guide to Mathematical Modelling*. Florida: CRC Press.

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. Em P. Abrantes, L. Leal e J. Ponte (Org.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 25-48). Lisboa: APM.

Kerr, D. R. e Maki, D. (1979). Mathematical Models to Provide Applications in the Classroom. In S. Sharon (ed.), *Applications in School Mathematics*. Reston: NCTM.

Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12,235-264.

Lesh, R (1990). Cornputer-based assessment of higher order understandings and processes in elementary mathematics. Em G. Kulm (Eds.), *Assessing of higher order thinking in mathematics*. Washington: A.A. A.S.

Lester, F. K. (1994). O que aconteceu à investigação em Resolução de Problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho e G. Amaro (Org.), *Resolução de Problemas: Processos cognitivos, conceções de professores e desenvolvimento curricular* (p. 13-31). Lisboa: IIE.

Maria, E. (2002). *Conexões Matemáticas num contexto de atividades de aplicagão, investigação e modelação matemática*. Lisboa: Univesidade Nova de Lisboa.

Ministério da Educação (1991). *Matemática e Métodos Quantitativos: Organização Curricular e Programas*. Lisboa: Direção Geral dos Ensino Básico e Secundário.

Ministério da Educação (1997). *Matemática: Programas – 10. 11º e 12º anos*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2001). *Matemática-A 10º ano Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas Homologação*. Departamento do Ensino Secundário.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE (Tradução portuguesa da edição original de 1989).

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM e IIE (Tradução portuguesa da edição original de 1991).

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Niss, M. (1992). O papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar. *Educação e Matemática*, 23, 1-2.

Niss, M. (1989). Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curricula. In W. Blum et al. (eds), Applications and Modelling in Learnig and Teaching Mathematics. Chichester: Ellis Horwood.

Ponte, J.P. (1992). *A modelação no processo de aprendizagem*. Educação e Matemática, 23, 15- 19.

Ponte, J.P. (2003). *Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal*. Investigar em Educação, 2-4.

Saljo, R. & Wyndhamn, J. (1993). Solving Everyday Problems in the Formal Setting. An empirical study of school as context for thought. In S. Chaiklin e J. Lave (Eds.) *Understanding Practice – Perspetives on activity and context* (p. 327-341). Cambridge: Cambridge University Press.

Silva, J. (1992). As aplicações da matemática: A vida quotidiana na sala de aula. *Educação e Matemática, 23,* 3-9.

Swetz, F. (1992). Quando e como podemos usar modelação*? Educação e Matemática*, 23, 45-48.

Swetz, F. e Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*. Reston: NCTM.

Tavares, F. (1998). *A atividade de aplicação e modelação matemática com recurso a ferramentas computacionais – um estudo de caso com alunos do 1º ano do ensino superior.* Lisboa: Associação dos Professores de Matemática.

Yin, R. (1989). Case *Study research: Design and methods*. California: Sage Publications.

ANEXO I

INQUÉRITO FINAL

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

DRELVT Direcção Regional de Educação de Lisboa e Vale do Tejo

Escola Secundária Jorge Peixinho

Questionário

Parte 1

1. O que é um modelo matemático?

____
____
____
____
____
____

2. O que é a modelação matemática?

____
____
____
____
____
____

3. Segundo o seu ponto de vista, diga qual a utilidade da modelação matemática.

____
____
____
____
____
____

Parte 2

1. Género: Feminino ☐ Masculino ☐

2. Indique quais as suas maiores dificuldades perante os problemas de modelação matemática apresentados nas aulas.

____
____
____
____
____

____
____
____

3. Sentiu a necessidade de mais tempo para resolver as tarefas de modelação matemática?

Sim ☐

Não ☐

4. Acha que o trabalho desenvolvido foi eficaz em termos da sua aprendizagem?

Sim ☐
Porquê?____
____
____

Não ☐
Porquê?____
____
____

5. Qual a vantagem de usar novas tecnologias na resolução de problemas de modelação matemática?

____

____

____

____

____

6. Responda às seguintes questões escolhendo uma e uma só resposta de 1 a 5. (**1** – Discordo totalmente, **2** – Discordo, **3** – Não concordo nem discordo, **4** – Concordo, **5** – Concordo totalmente)

Questão	1	2	3	4	5
Não consegui entender como é que a modelação matemática se relaciona com os problemas reais.					
A modelação matemática facilitou a minha interpretação dos problemas.					
Compreendi melhor certos conceitos matemáticos com a ajuda da modelação matemática.					
As aulas de modelação matemática ajudaram-me a saber utilizar certos conceitos matemáticos em situações reais.					
Os problemas apresentados nas aulas eram interessantes e originais.					
A modelação matemática torna as aulas de matemática mais dinâmicas e interessantes.					
Não existe qualquer interesse na resolução de problemas de modelação matemática.					

7. Faça um breve comentário sobre o que o agradou mais ou menos nas aulas de modelação matemática e sugira, se assim o entender, alterações que gostasse de fazer às aulas de modelação matemática.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

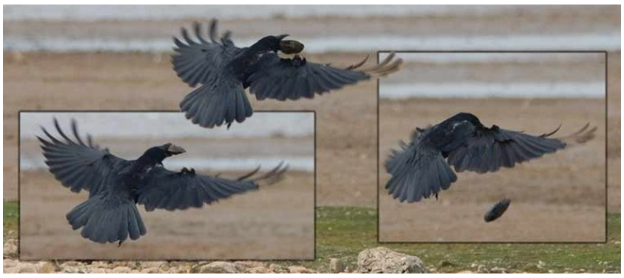
____

ANEXO II

TAREFA 1

Matemática
11.º B
Ano letivo 2011/2012

Ficha de Trabalho – Corvos e Búzios



As gaivotas e os corvos alimentam-se de vários tipos de moluscos erguendo-os no ar e deixando-os cair contra as rochas para abrir as conchas.

Os corvos parecem ser seletivos e apanham apenas búzios grandes, mas por outro lado são persistentes, uma vez que um único corvo pode ser observado a deixar cair um búzio cerca de 20 vezes. Os cientistas sugeriram que este comportamento é um exemplo de uma tomada de decisão no sentido de otimizar a luta pela sobrevivência.

Reto Zach, um investigador americano, estudou o comportamento dos corvos de determinada região, com o objetivo de tentar explicar porque é que eles voam para uma altura de cerca de 5 metros antes de deixarem cair um búzio contra a rocha e porque escolhem os maiores búzios para o fazer.

Para isso realizou a seguinte experiência: deixou cair várias vezes um búzio de uma altura fixa até este partir, repetiu a experiência considerando diferentes alturas, registou e analisou os dados.

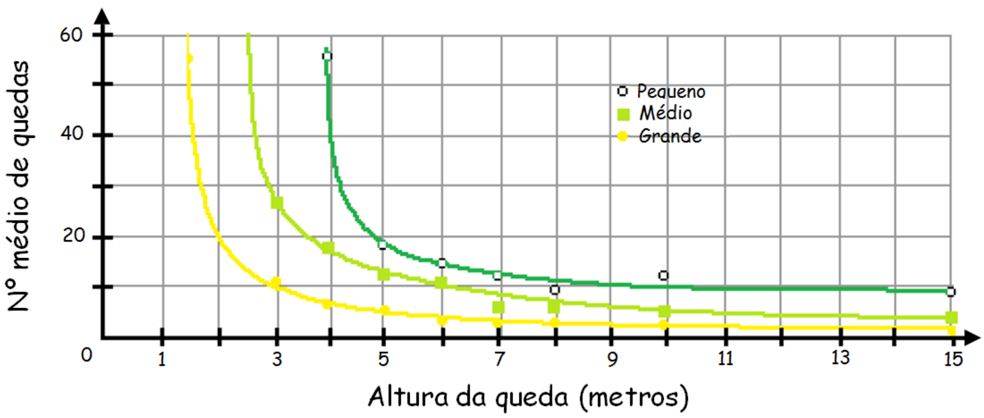
Altura da queda (m)	1,5	2	3	4	5	6	7	8	10	15
Nº médio de quedas	56	20	10.2	7.6	6	5	4.3	3.8	3.1	2.5

1. Recorrendo à calculadora gráfica introduza os dados obtidos por Reto Zach.
   1.1 Com o auxílio da calculadora e através de várias experiências encontre um modelo que se ajuste à nuvem de pontos obtida.

1.2 De acordo com o modelo encontrado, sem efetuar cálculos e sem recorrer à calculadora gráfica, consegue prever o número médio de quedas se a altura for de 250 metros? Justifique a sua resposta.

1.3 Haverá um número mínimo ou um número máximo de quedas necessárias para abrir um búzio?

2. Os resultados apresentados anteriormente referem-se a búzios grandes, contudo Reto Zach recolheu búzios de vários tamanhos (pequenos, médios e grandes), fez a experiência descrita no exercício anterior para cada um dos búzios e registou os dados. O gráfico abaixo representa os resultados obtidos pelo cientista e os respetivos modelos que a eles se ajustam.



A que conclusões pode chegar a partir da observação do gráfico? Qual o tamanho do búzio que beneficia o trabalho dos corvos?

3. Os cientistas chegaram à conclusão que o trabalho (W) realizado pelo corvo para partir um búzio grande segue a seguinte lei:

$$W = h \times N$$

h = altura da queda

Número de quedas

3.1 Recorrendo ao modelo que encontrou no exercício 1 e ao algoritmo da divisão de polinómios, determine as assíntotas do gráfico da função: $W = h \times a + bh - c$.

3.2 Para que valores de h é mínimo o trabalho do corvo?

3.3 Tendo em conta todas as informações que reuniu, comente a seguinte frase: Os cientistas sugeriram que o comportamento dos corvos é um exemplo de tomada de decisão no sentido de otimizar a luta pela sobrevivência.

Curiosidade: A escolha inteligente e seletiva dos corvos pode causar o desaparecimento dos búzios grandes na região onde o estudo decorreu.

ANEXO III

TAREFA 2

Matemática
11.º B
Ano letivo 2011/2012

Ficha de Trabalho – Nascimento e Ocaso do Sol

Sempre ouvimos dizer, aqui no hemisfério norte, que o dia mais longo do ano é no dia 21 de junho, dia que marca o início do verão, e o dia mais mais curto é no dia 21 de dezembro, dia que marca o início do inverno. É curioso verificar que para quem se encontra no hemisfério sul, 21 de junho marca o dia mais curto e 21 de dezembro o dia mais longo. Na linha do equador (latitude zero) os dias parecem ter todos as mesma duração.

Poderá constatar, na investigação para a construção do relógio de sol, que a latitude é um fator determinante para a explicação da duração dos dias e das noites. Esta investigação fica ao seu critério.

É um facto que os dias estão cada vez maiores, em dezembro, podíamos ver o sol a desaparecer pouco depois das 17h e hoje o acaso acontece perto das 18h. Em anexo, encontra-se uma tabela, do Observatório Astronómico de Lisboa, onde são indicados o Nascimento e Ocaso do Sol em Lisboa no ano de 2011. Para cada um dos meses foi determinada a duração média do dia, como mostra a seguinte tabela:

Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Duração média do dia (horas)	9,80	10,75	11,95	13,20	14,27	14,82	14,57	13,63	12,43	11,18	10,08	9,50

4. Recorrendo à calculadora gráfica introduza os dados obtidos.
   4.1 Encontre um modelo que se ajuste à nuvem de pontos obtida.

4.2 Tendo em conta o modelo encontrado, coloque-se na pele de um investigador e formule questões que lhe pareçam adequadas e pertinentes. Não precisa de responder às questões.

4.3 De acordo com o modelo que encontrou, responda às seguintes questões:

4.3.1 Em que mês a duração média do dia é maior? Confronte o seu resultado com os dados reais do Observatório Astronómico de Lisboa e responda se o seu modelo reproduz adequadamente a realidade.

4.3.2 Sabendo que f(x) representa o modelo encontrado, o que significa $f(x) > 12$ no contexto do problema?

ANEXO IV

TABELA DO OBSERVATÓRIO DE LISBOA

OBSERVATÓRIO ASTRONÓMICO DE LISBOA
Tapada da Ajuda, 1349-018 LISBOA

NASCIMENTO E OCASO DO SOL (LISBOA)

(Bordo superior) (Tempo universal)

2011

DIA	JANEIRO		FEVEREIRO		MARÇO		ABRIL		MAIO		JUNHO	
	Nasc.	Ocaso	Nasc.	Ocaso	Nasc.	Ocaso	Nasc.	Ocaso	Nasc.	Ocaso	Nasc.	Ocaso
	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m
1	7:55	17:26	7:43	17:58	7:10	18:29	6:22	19:00	5:40	19:29	5:14	19:55
2	7:55	17:27	7:42	17:59	7:08	18:30	6:21	19:01	5:39	19:29	5:14	19:56
3	7:55	17:27	7:41	18:00	7:07	18:31	6:19	19:02	5:38	19:30	5:13	19:57
4	7:55	17:28	7:40	18:01	7:05	18:32	6:18	19:03	5:36	19:31	5:13	19:57
5	7:55	17:29	7:39	18:03	7:04	18:33	6:16	19:04	5:35	19:32	5:13	19:58
6	7:55	17:30	7:38	18:04	7:02	18:34	6:15	19:05	5:34	19:33	5:12	19:59
7	7:55	17:31	7:37	18:05	7:01	18:35	6:13	19:06	5:33	19:34	5:12	19:59
8	7:55	17:32	7:36	18:06	6:59	18:36	6:12	19:06	5:32	19:35	5:12	20:00
9	7:55	17:33	7:35	18:07	6:58	18:37	6:10	19:07	5:31	19:36	5:12	20:00
10	7:55	17:34	7:34	18:08	6:56	18:38	6:09	19:08	5:30	19:37	5:12	20:01
11	7:55	17:35	7:33	18:09	6:55	18:39	6:07	19:09	5:29	19:38	5:12	20:01
12	7:54	17:36	7:32	18:11	6:53	18:40	6:06	19:10	5:28	19:39	5:11	20:02
13	7:54	17:37	7:31	18:12	6:52	18:41	6:04	19:11	5:27	19:40	5:11	20:02
14	7:54	17:38	7:29	18:13	6:50	18:42	6:03	19:12	5:26	19:41	5:11	20:03
15	7:54	17:39	7:28	18:14	6:49	18:43	6:01	19:13	5:25	19:42	5:11	20:03
16	7:53	17:40	7:27	18:15	6:47	18:44	6:00	19:14	5:24	19:42	5:11	20:03
17	7:53	17:41	7:26	18:16	6:46	18:45	5:58	19:15	5:23	19:43	5:12	20:04
18	7:52	17:42	7:25	18:17	6:44	18:46	5:57	19:16	5:23	19:44	5:12	20:04
19	7:52	17:43	7:23	18:18	6:43	18:47	5:56	19:17	5:22	19:45	5:12	20:04
20	7:51	17:44	7:22	18:20	6:41	18:48	5:54	19:18	5:21	19:46	5:12	20:05
21	7:51	17:45	7:21	18:21	6:39	18:49	5:53	19:19	5:20	19:47	5:12	20:05
22	7:50	17:47	7:19	18:22	6:38	18:50	5:51	19:20	5:20	19:48	5:12	20:05
23	7:50	17:48	7:18	18:23	6:36	18:51	5:50	19:21	5:19	19:49	5:13	20:05
24	7:49	17:49	7:17	18:24	6:35	18:52	5:49	19:22	5:18	19:49	5:13	20:05
25	7:48	17:50	7:15	18:25	6:33	18:53	5:47	19:23	5:18	19:50	5:13	20:05
26	7:48	17:51	7:14	18:26	6:32	18:54	5:46	19:24	5:17	19:51	5:13	20:05
27	7:47	17:52	7:13	18:27	6:30	18:55	5:45	19:25	5:16	19:52	5:14	20:06
28	7:46	17:53	7:11	18:28	6:28	18:56	5:44	19:26	5:16	19:52	5:14	20:06
29	7:45	17:55	-	-	6:27	18:57	5:42	19:27	5:15	19:53	5:15	20:06
30	7:45	17:56	-	-	6:25	18:58	5:41	19:28	5:15	19:54	5:15	20:06
31	7:44	17:57	-	-	6:24	18:59	-	-	5:14	19:55	-	-

OBSERVATÓRIO ASTRONÓMICO DE LISBOA
Tapada da Ajuda, 1349-018 LISBOA

NASCIMENTO E OCASO DO SOL (LISBOA)

(Bordo superior) (Tempo universal)

2011

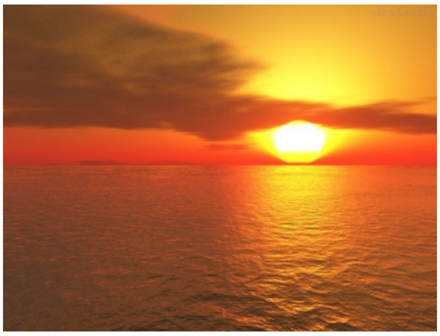
JULHO		AGOSTO		SETEMBRO		OUTUBRO		NOVEMBRO		DEZEMBRO		DIA
Nasc.	Ocaso	Nasc.	Ocaso	Nasc.	Ocaso	Nasc.	Ocaso	Nasc.	Ocaso	Nasc.	Ocaso	
h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	
5:16	20:05	5:38	19:48	6:05	19:08	6:32	18:20	7:03	17:37	7:35	17:16	1
5:16	20:05	5:39	19:47	6:06	19:06	6:33	18:19	7:04	17:36	7:36	17:16	2
5:16	20:05	5:40	19:46	6:07	19:05	6:34	18:17	7:05	17:35	7:37	17:15	3
5:17	20:05	5:40	19:45	6:08	19:03	6:35	18:16	7:06	17:34	7:38	17:15	4
5:18	20:05	5:41	19:44	6:09	19:01	6:36	18:14	7:07	17:33	7:39	17:15	5
5:18	20:05	5:42	19:43	6:10	19:00	6:37	18:12	7:09	17:32	7:40	17:15	6
5:19	20:04	5:43	19:41	6:11	18:58	6:38	18:11	7:10	17:31	7:41	17:15	7
5:19	20:04	5:44	19:40	6:12	18:57	6:39	18:09	7:11	17:30	7:42	17:15	8
5:20	20:04	5:45	19:39	6:13	18:55	6:40	18:08	7:12	17:29	7:43	17:15	9
5:21	20:03	5:46	19:38	6:13	18:54	6:41	18:06	7:13	17:28	7:43	17:15	10
5:21	20:03	5:47	19:37	6:14	18:52	6:42	18:05	7:14	17:27	7:44	17:15	11
5:22	20:03	5:48	19:36	6:15	18:50	6:43	18:03	7:15	17:26	7:45	17:15	12
5:23	20:02	5:48	19:34	6:16	18:49	6:44	18:02	7:16	17:25	7:46	17:16	13
5:23	20:02	5:49	19:33	6:17	18:47	6:45	18:01	7:17	17:24	7:47	17:16	14
5:24	20:01	5:50	19:32	6:18	18:46	6:46	17:59	7:18	17:24	7:47	17:16	15
5:25	20:01	5:51	19:30	6:19	18:44	6:47	17:58	7:20	17:23	7:48	17:16	16
5:25	20:00	5:52	19:29	6:20	18:42	6:48	17:56	7:21	17:22	7:49	17:17	17
5:26	19:59	5:53	19:28	6:20	18:41	6:49	17:55	7:22	17:22	7:49	17:17	18
5:27	19:59	5:54	19:26	6:21	18:39	6:50	17:53	7:23	17:21	7:50	17:17	19
5:28	19:58	5:55	19:25	6:22	18:38	6:51	17:52	7:24	17:20	7:50	17:18	20
5:29	19:57	5:56	19:24	6:23	18:36	6:52	17:51	7:25	17:20	7:51	17:18	21
5:29	19:57	5:57	19:22	6:24	18:34	6:53	17:49	7:26	17:19	7:51	17:19	22
5:30	19:56	5:57	19:21	6:25	18:33	6:54	17:48	7:27	17:19	7:52	17:19	23
5:31	19:55	5:58	19:19	6:26	18:31	6:55	17:47	7:28	17:18	7:52	17:20	24
5:32	19:54	5:59	19:18	6:27	18:30	6:56	17:46	7:29	17:18	7:53	17:21	25
5:33	19:53	6:00	19:17	6:28	18:28	6:57	17:44	7:30	17:17	7:53	17:21	26
5:33	19:53	6:01	19:15	6:29	18:27	6:58	17:43	7:31	17:17	7:54	17:22	27
5:34	19:52	6:02	19:14	6:29	18:25	6:59	17:42	7:32	17:17	7:54	17:23	28
5:35	19:51	6:03	19:12	6:30	18:23	7:00	17:41	7:33	17:16	7:54	17:23	29
5:36	19:50	6:04	19:11	6:31	18:22	7:01	17:39	7:34	17:16	7:54	17:24	30
5:37	19:49	6:05	19:09	-	-	7:02	17:38	-	-	7:55	17:25	31

ANEXO V

TAREFA 3

Matemática
11.º B
Ano letivo 2011/2012

Ficha de Trabalho – Linha do Horizonte



Imagine alguém que observe a linha do horizonte. Parece claro que a distância que a vista consegue alcançar depende da altitude do ponto de observação.

No quadro seguinte, estão registados alguns valores da altura *h*, em m, a que o observador se encontra, acima do nível do mar, e as correspondentes distâncias *d*, em km, que, em cada caso, vão do observador até à linha do horizonte.

Altura (m)	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
Distância (km)	3,6	5	6,2	7,1	8,9	11,3	15,9	19,5	22,6	25,2	35,7

5. Recorrendo à calculadora gráfica introduza os dados acima apresentados. Utilize uma janela de visualização adequada para a observação gráfica dos dados.
   5.1 Na busca de uma expressão analítica que possa ser adotada como melhor modelo para a situação em causa, verifique se existe alguma relação entre d e h, preenchendo, no quadro anterior, uma terceira linha com os valores de dh . O que pode concluir?
   5.2 Tendo em conta as informações obtidas anteriormente, através de várias experiências, com o valor k, encontre um modelo que melhor se ajuste à nuvem de pontos obtida.

6. Seja f a função que a cada x (altura, em metros, a que se encontra o observador) faz corresponder o valor da distância, em km, do observador à linha do horizonte, ou seja, f: $x \mapsto 3{,}568x$. Determine f(16), com uma aproximação às decimas, e indique o seu significado no contexto do problema.
7. Conjeture acerca do domínio da função f.